Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 21
Marzo de 2018

No, este año no hay JEMA. Fernando Corbalán suele decir (creo que citando a alguien) que los profesores de matemáticas nos pasamos la vida contestando preguntas que nunca nos han hecho. No es el caso, porque en los últimos tiempos nos han preguntado varias veces por la III JEMA.

Cuando conseguimos reflotar la Sociedad uno de los retos importantes era realizar unas jornadas al estilo de otras de las sociedades de la FESPM, especialmente, las de nuestros vecinos riojanos y navarros. Sin embargo, la dificultad de organizar un evento de esas carcterísticas unido al temor al fracaso nos impedía lanzarnos. Fue Tomás Recio quien nos dio un empujoncito incitándonos y ayudándonos (económica y organizativamente) a organizar nuestro primer día GeoGebra en el curso 2013-2014. Hubo muchos fallos en la organización, pero la respuesta del profesorado nos motivó a organizar (esta vez *solos*) nuestra primera Jornada de Educación Matemática en Aragón en el curso 2014-2015. Ya lanzados, en 2015-2016 montamos el II Día GeoGebra y en 2016-2017 la II JEMA. Cada vez con mayor asistencia y con leves mejoras organizativas. En todo caso, siempre dejamos claro nuestra intención de que la JEMA tenga carácter bienal.

Es decir, *toca* una JEMA en 2018-2019. Nuestra intención es llevarla a cabo, así que desde ya os animamos a que vayáis pensando qué presentar: para nosotros, más allá de las plenarias nos parece esencial que ese foro sirva para conocer y compartir experiencias que se están llevando al aula realmente, en nuestra comunidad. Una oportunidad para vernos, hablar, intercambiar logros y fracasos... Eso sí, seguimos echando de menos más personas que se asocien y más socios que colaboren con la organización de este tipo de eventos.

Al observar la secuencia de actividades en los diferentes cursos se ve que en el presente *tocaba* un día GeoGebra. Consideramos que ya hemos agotado esa vía pues no hay en Aragón tanta actividad en torno al programa como para justificar un tercer día; o, al menos, nosotros no hemos sido capaces de detectarlo. En cualquier caso, sí que considerábamos que como Sociedad debíamos organizar un *gran* evento por curso.

Desde ya hace unos años, el 12 de mayo celebra la FESPM el Día Escolar de las Matemáticas en homenaje a Puig Adam. En 2018 cae en sábado, así que nos pareció buena idea organizar una especie de jornada de matemáticas en la calle. Se trataba de que tuviera lugar en las tres capitales de provincia de manera simultánea y de mostrar una serie de actividades, más o menos lúdicas, más o menos manipulativas, que, en un momento u otro, realizamos en el aula.

Sumario

Día π, 2018
El teatro en la semana matemática: *Los amantes matemáticos*
Percusión y sistema binario
Alumnos como profesores: una experiencia sobre papiroflexia y lenguaje en matemáticas
Rectángulos de Mondrian. Rectángulos para pensar
Viajando en avión
Semana matemática en Castejón de Sos

Suma Interactivo

únete a la SAPM
click

Hemos hecho varios llamamientos a colaborar en las actividades del DEM, en este boletín, por correo electrónico, convocando reuniones... Los compañeros en Huesca y en Teruel enseguida asumieron el reto y tienen montados sendos grupos de trabajo, de tal forma que la jornada tiene garantizada su celebración allí.

Sin embargo, para Zaragoza nos hemos encontrado con una respuesta prácticamente nula; así, que en la capital de Aragón no vamos a poder tener esa jornada de matemáticas en la calle. Solo tendremos un par de eventos. Uno tendrá lugar en Aragón Radio con la entrega de premios, el día 11 por la tarde, de los concursos de radionovelas matemáticas, tangram, figuras imposibles y microrrelatos. Además, el 9 de mayo en el Centro Joaquín Roncal se inaugura la exposición *Naturales como tú* que se podrá visitar junto a otra de fotografías del concurso del Andalán, durante una semana.

Esperamos informar de todas estas actividades en el próximo número de Entorno Abierto. Para entonces conoceremos también a los ganadores de la XXVII Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO. A continuación podéis ver un breve resumen fotográfico de todas las sedes en las que se celebró la semifinal.

DANIEL SIERRA RUIZ
Presidente de la SAPM

Día π, 2018

IES El πcarral

En nuestro centro celebramos el Día π como colofón a nuestra semana de Conexión Matemática. Para ello promovimos cuatro actividades:

— *Visionado en las aulas de π*. Como motivación para participar en el día π, se proyectó el corto *πpas* y el recopilatorio de secuencias, realizado por José María Sorando y colgado en el blog de la SAPM.

— *Apadrina un decimal de π*. Los alumnos de forma voluntaria, y tras una pequeña explicación por parte de su profesor de referencia, debían seleccionar un número, con el número de dígitos que necesitara, con la condición de que fueran cifras que aparecieran consecutivamente y que no estuvieran apadrinadas ya. A ese número se le debía dar un sentido ya fuera emocional, gracioso…, algo que el alumno relacionara con ese número (día de cumpleaños, número de suspensos esperados, número de su camiseta de baloncesto,...). Los alumnos comenzaron el día 14 a apadrinar y tras una semana, se colocará de forma «semi-permanente» en algún rincón del centro, junto con todo lo más significativo de la semana matemática.

— *Un selfie con π*. Teniendo la exposición *Las matemáticas en el día a día*, rincón de fotografía matemática, hemos propuesto a los alumnos que se hagan una foto con algo relacionado con dicho número (actividad propuesta en la web <http://www.piday.es/> y adaptada para nuestro centro).

— *Haz un pillish*. Teniendo la exposición de *Micro-relatos matemáticos*, rincón de poesía matemática, hemos propuesto que intenten componer algún relato o texto donde cumplan las características del estilo *pillish* (actividad propuesta en la web <http://www.piday.es/> y adaptada para nuestro centro). En esta actividad no hubo participación por parte de los alumnos.

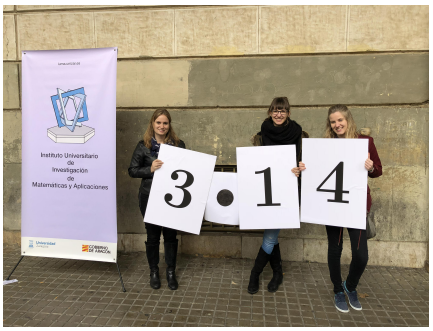
El IUMA

El Instituto Universitario de Matemáticas (IUMA) del campus público aragonés invitó a participar el miércoles 14 en experimentos relacionados con el número pi.

Las matemáticas volvieron a salir el miércoles 14 a la calle con motivo de la celebración del Día Internacional de Pi, que se celebra el 14 de marzo. La idea original fue de Larry Shaw, un físico estadounidense (a los físicos les encantan las matemáticas) al que en 1988 se le ocurrió celebrar el día del número π el 14 de marzo, ya que en EE.UU. dicha fecha se escribe 3/14, que son las primeras 3 cifras de este número. El Congreso de EE.UU. en 2009 declaró oficialmente que este día sería el Día Internacional de π. Desde entonces, cada año más y más gente se une a celebrar este día para, con π como anfitrión, preparar y disfrutar de las matemáticas.

En Zaragoza, científicos del IUMA organizaron una serie de actividades que tuvieron lugar en la plaza San Francisco, entre las 12 y las 14 horas. En concreto se invitó a obtener aproximaciones del número pi utilizando como unidad de medida nuestros propios pies. También hubo un *photo-call* en el que, bajo el lema «Take a π-cture»

los viandantes podían fotografiarse con un dígito y formar parte de un vídeo en el que irán apareciendo en orden las cifras decimales de pi.



Por la tarde, a las 18:00 horas, tuvo lugar una conferencia titulada *π-dáctica* en la sala de grados de la Facultad de Ciencias. El ponente fue Sergio Martínez, profesor asociado del Departamento de Matemáticas y vicesecretario de la Real Sociedad Matemática Española, el cual nos habló de cómo enfocar la enseñanza del número pi en las distintas etapas educativas. Durante la charla se proyectó el vídeo con las fotos de la mañana.

Además, desde el IUMA se anima a publicar en Twitter o Instagram una imagen en la que reconozcas a π, con un texto creativo y descriptivo. Incluye la etiqueta *#SelfiePi* y sigue al instituto en su cuenta oficial *@iuma_unizar*.

IES Salvador Victoria

El 14 de marzo de 2018 decidimos celebrar el Día de Pi en el IES Salvador Victoria con dos actividades:

— *Pintar* una columna del instituto con un *skyline* de unos cuantos decimales de pi, con la colaboración del departamento de Educación Plástica. La actividad se realizó con los alumnos de Matemáticas Aplicadas de 4.º ESO. Los elementos que decoran la parte superior e inferior de la columna son espirolaterales sobre una trama isométrica y utilizando decimales de pi.

— *Interpretación* de una adaptación de la obra *What pi sounds like* de Michael Blake, en la que, asignando una nota a cada número del 1 al 9 (al 1 el DO, al 2 RE, y así sucesivamente) se van musicalizando 36 decimales de pi. Se contó con la colaboración del departamento de Música y participaron alumnos de 1.º y 3.º de ESO. <https://youtu.be/3ZYOLm0d4V8>.

IES Valle del Jiloca

En el IES Valle del Jiloca de Calamocha, celebramos el Día de Pi con dos actividades:

— *Medir pi:* Preparamos nuestro *Kit de medir Pi:* un metro, unas cuerdas, una calculadora, lápiz y papel y una colección de objetos circulares de diferentes tamaños. Con ellos, en el Taller de Matemáticas de 2.º ESO iniciamos la tarea de obtener longitud y diámetro de circunferencias de objetos de distintos tamaños, y calcular la razón. Lo mejor, la cara de sorpresa que ponen cuando se dan cuenta de que, sea cual sea el objeto medido, el cociente entre la longitud y el diámetro sale muy parecido a lo que ellos conocen como el número pi. Da igual que se lo cuentes previamente, y cuántas veces lo hagas: la sorpresa siempre está ahí.

— *Skyline de pi.* La idea era elaborar un skyline de edificios contiguos de una ciudad en la que cada rascacielos tuviera la altura proporcional a un decimal del número pi. Se implicaron la totalidad de alumnos de 1.º ESO, haciendo cada uno de ellos un tramo de diez decimales. Trabajamos sobre papel cuadriculado para facilitar el que las proporciones fueran iguales en todos los dibujos. Decoraron los edificios con ventanas y los pintaron. Luego los recortamos, los pegamos sobre una cartulina azul y los colocamos en la pared de su pasillo. Tenemos 600 decimales... ¡¡casi 12 metros de número pi!!

El teatro en la semana matemática: *Los amantes matemáticos*

por
María Sánchez Morote
(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

El Instituto de Educación Secundaria Salvador Victoria de Monreal del Campo (Teruel) celebró su «semana matemática» del 5 al 9 de febrero. En ella se suceden multitud de actividades y talleres que implican tanto al alumnado como a los distintos departamentos docentes que conforman el centro. Desde el Departamento de Lengua Castellana y Literatura se pretendió conjugar Lengua y Matemáticas desde la representación teatral por lo que la resolución de problemas se llevó a escena en una obra titulada *Los amantes matemáticos*.

La propuesta de elaborar una obra de teatro en la que se aunaran Lengua, Matemáticas e Historia resultó un reto atractivo, ya que nos ofrecía multitud de posibilidades: por un lado, los alumnos podrían asistir a la magia de la representación teatral; por otro, se elimina la batalla tradicional entre las Letras y las Ciencias introduciendo la resolución de problemas como parte del hilo argumental del teatro. Además, la obra se situó en torno a la leyenda de los Amantes de Teruel por lo que el componente histórico también estaba presente.

Desde el Departamento de Lengua Castellana y Literatura se escribió el texto teatral que, dicho sea de paso, no pretendía ofrecer una versión puramente fiel a la realidad histórica, sino que esta fuera tan solo el pretexto del fondo que despertara el interés del alumnado por la historia verdadera. Una vez escrito el texto, fueron tres profesores del Departamento quienes interpretaron los diferentes papeles: doña Socorro Albarrán (trovador), don José Alberto Martín (don Diego) y doña María Sánchez (doña Isabel). En este sentido, es curioso advertir cómo los alumnos se sorprenden ante el hecho de ver a los profesores actuar y participar en este tipo de actividades, creemos que resulta siempre una experiencia positiva que el profesorado se muestre activo, puesto que, en nuestra opinión, se favorece la convivencia desde la óptica de lo lúdico que rebasa las paredes de las aulas.

Además, la representación se realizó en dos pases, el primero, para alumnos de 1.º y 2.º de ESO y Bachillerato, y el segundo, para alumnos de 3.º y 4.º de ESO y Formación Profesional Básica. En los dos turnos se pidió la colaboración de tres alumnos para dar la solución a los problemas que se planteaban, así una apurada doña Isabel pedía al alumno en cuestión la resolución del primer problema para retener a su amado don Diego , empeñado en partir a la batalla; en el segundo problema, doña Isabel retaba a don Diego quien, esta vez, solicitaba la ayuda de un alumno para la resolución del segundo entuerto que ponía en juego su inteligencia; por último, el tercer problema surgía como demostración de la espera y fidelidad de doña Isabel a don Diego al que le entrega un acertijo con la promesa de «no escuchar de ningún otro, solución alguna», pero estando don Diego en la batalla, un «apuesto matemático» aparecerá para dar la respuesta a doña Isabel, siendo esta la tercera intervención del alumnado en la obra.

Desde el Departamento de Matemáticas, el profesor y coordinador de las actividades que conformaron esta semana, ela-

boró unos cuadernillos que repartió a los alumnos antes de iniciarse la obra, de manera que los alumnos pudieran acceder a los mismos y resolverlos en papel.

Desde el Departamento de Música, se inició el espectáculo con una danza medieval preparada por alumnos de los dos turnos mencionados anteriormente. La representación contaba con la colaboración de la profesora de Música, quien tocando de forma brillante el saxofón creó un ambiente cuanto menos mágico, y desde el Departamento de Educación Plástica se elaboraron los decorados. Otros compañeros del centro proporcionaron el vestuario.

Como se puede observar, contamos con una importante colaboración y coordinación interdepartamental puesto que, de otra manera, este tipo de actividades serían imposibles. Además, es justo el agradecimiento al equipo directivo del IES Salvador Victoria quienes siempre nos animan y nos apoyan en aquello que se propone.

Conclusión

Para concluir, nos gustaría resaltar lo positivo de esta experiencia. Los alumnos no tienen la oportunidad de asistir al teatro de forma asidua, por lo que llevarles el espectáculo y convertirlos en espectadores de la magia del directo ya resulta una motivación principal. Creemos que en este mundo, dominado por las pantallas, la novedad estriba precisamente en acercarlos a la viveza de la representación llevada a escena por sus profesores del día a día quienes por unas horas encarnan «a otros». Además, declaramos el fin a la batalla entre las Ciencias y las Letras puesto que los alumnos resuelven problemas envueltos en la espiral de la obra, dispuestos a ayudar a nuestros apurados protagonistas. Todo esto, dejándonos llevar por el sonido de la danza medieval y el saxo que iluminaban los decorados que nos llevan al siglo XII, creyendo en lo que hacemos cada día, que no es otra cosa que transmitir con ilusión aquellos valores que deben salir de las aulas, aunque solo sea de vez en cuando.

Percusión y sistema binario

por
Óscar Carrión Lostal
(IES Valdespartera, Zaragoza)

Sirva este artículo como homenaje a un gran músico y profesor de batería de la Escuela Municipal de Música y Danza del Ayuntamiento de Zaragoza, *Pedro Peralta*, y con el que tanto he compartido hasta la fecha de su fallecimiento el pasado mes de enero; con esas conversaciones tanto de música y métodos de enseñanza, como de cualquier otro aspecto de relevancia que se producía y que analizábamos con espíritu crítico y constructivo.

Te agradezco la amistad de la que me hiciste partícipe desde principios de los años 90 en los cuales coincidimos, al igual que con tu hermano Chema y tus otros compañeros de viaje, y donde yo empezaba a tener curiosidad por aprender mis primeras nociones de música, en aquel gran proyecto de enseñanza de *música moderna* para diferentes instrumentos (guitarra, bajo y batería) que fue el *Taller de rock*, que se desarrolló en el Centro Cívico Delicias hasta vuestra incorporación, después de un camino largo, tortuoso y lleno de obstáculos, al sistema educativo, del departamento de música moderna de la Escuela Municipal de Música y Danza del Ayuntamiento de Zaragoza, y que tanto habéis hecho y luchado por él en esta ciudad. Por todo ese camino que habéis recorrido y que tanto nos ha servido a los que hemos participado en numerosos proyectos musicales de la ciudad, gracias de todo corazón. Se nos ha ido uno de los *mejores baterías del panorama musical*, un buen profesor de batería y una mejor persona, y que como le gustaba a él, se nos ha marchado sin hacer ruido, *sigilosamente, esperando el momento*…

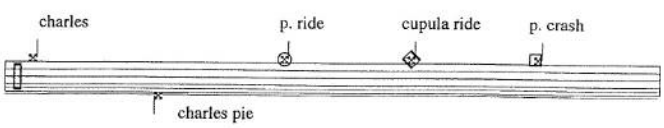
Ni que decir tiene, la relación que mantiene la música con las matemáticas. Ya el mundo griego, a través de la *escuela pitagórica*, y su comprensión de la armonía del universo, idearon modelos astronómicos y musicales. Su sistema musical, estaba basado en pisar la cuerda en función de su longitud, así se obtienen distintas relaciones, 2:1 (intervalo de octava), 3:2 (intervalo de quinta), 4:3 (intervalo de cuarta).

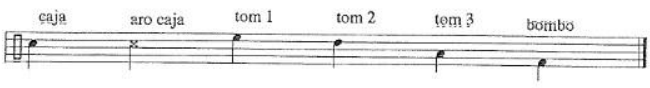
Nos centraremos en el estudio de la *percusión* y en su instrumento de música moderna, la *batería*, ya que en dicho instrumento, podemos simplificar el hecho de que suena un golpe (1) o no suena (0), sin entrar en matices, como en otros instrumentos de cuerda, si se mantiene el sonido de la nota o no.

Para ello tan solo necesitamos definir la notación o *escritura de la batería* en un pentagrama en donde se colocan las distintas figuras o notas, en función de la altura, o lo que es lo mismo, el elemento de la batería.

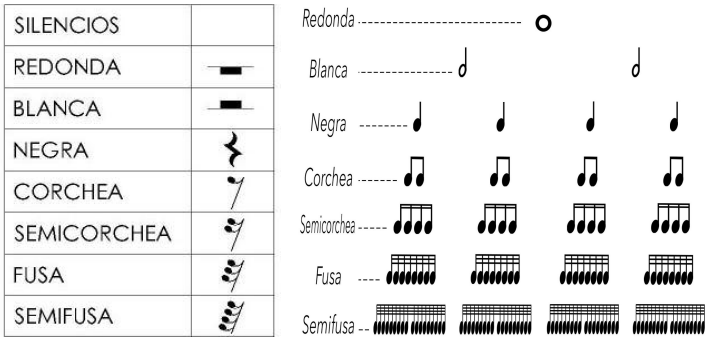
La escritura de la batería está escrita sobre la *clave de percusión*, que es el *rectángulo* que aparece al comienzo de cada pentagrama, y la llave está diseñada para un set básico de batería, que corresponde a los elementos descritos en la figura anterior, que corresponden con los elementos básicos de una batería.

La *llave* a usar será la siguiente:





Las notas o figuras musicales y los silencios correspondientes en función de la duración y la relación entre las mismas, de una forma gráfica es la siguiente:



Es decir, por una redonda (2^0), tengo 2 blancas (2^1), por cada blanca tengo 2 negras, o lo que es lo mismo, por una redonda tengo 4 negras (2^2), por cada negra tengo dos corcheas, o por cada redonda tengo 8 corcheas (2^3), 16 semicorcheas (2^4), y así sucesivamente, lo que pone de manifiesto el *sistema binario* o de base 2 en las notas musicales. Es decir, nos aparecen las potencias de 2.

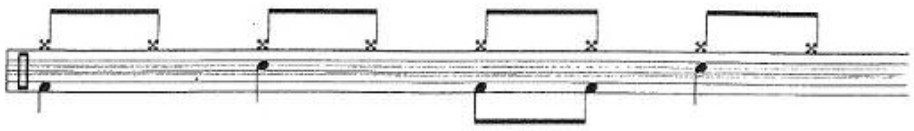
Codificación a sistema binario de un ritmo de batería

1.º Separaremos cada elemento de la batería por filas, es decir, una fila por cada elemento usado de la batería: charles, bombo, caja, tom1, tom2, tom3 o timbala o tom base, plato crash, plato ride, etc.
2.º Por cada elemento codificaremos su sistema binario de unos y ceros. Para ello subdividir siempre en la unidad más pequeña utilizada en la partitura.

Ejemplos

Ritmos de pop/rock

Primer ritmo: un tiempo 4/4 de un ritmo.



1.º Aparecen tres elementos de la batería: charles, bombo y caja.
2.º La unidad más pequeña de nota que aparece es la corchea, por lo que cada tiempo del compás 4/4, lo dividiremos en dos partes, y como hay un compás, $2 \times 4 = 8$ divisiones fundamentales.

Charles	1	1	1	1	1	1	1	1
Caja	0	0	1	0	0	0	1	0
Bombo	1	0	0	0	1	1	0	0

Segundo ritmo: dos tiempos 4/4 de un mismo ritmo pero escrito de forma diferente.

1.º Aparecen tres elementos de la batería: charles, bombo y caja.
2.º La unidad más pequeña de nota que aparece es la corchea, por lo que cada tiempo del compás 4/4, lo dividiremos en dos partes, y como hay dos compases, $2 \times 4 + 2 \times 4 = 16$ divisiones fundamentales.

Charles	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Caja	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Bombo	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0

Tercer ritmo: cuatro tiempos 4/4 de un mismo ritmo pero escrito de forma diferente y tocado con distintas combinaciones de mano. En este caso solo codificaremos un solo ritmo 4/4.

1.º Aparecen tres elementos de la batería: charles, bombo y caja.
2.º La unidad más pequeña de nota que aparece es la semicorchea, por lo que cada tiempo del compás 4/4, lo dividiremos en cuatro partes, $4 \times 4 = 16$ divisiones.

Charles	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Caja	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Bombo	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Bibliografía

Apuntes de batería de la Escuela Municipal de Música y Danza realizados por Pedro Peralta.

Alumnos como profesores: una experiencia sobre papiroflexia y lenguaje en matemáticas

por

Pablo Beltrán-Pellicer

(CPEPA Margen Izquierda, Zaragoza; Universidad de Zaragoza)

La oportunidad de utilizar la papiroflexia como recurso educativo en matemáticas no ha pasado desapercibida. Hull (2013), por ejemplo, es un claro exponente de esta corriente, y ofrece en su libro una multitud de propuestas de aprendizaje basadas en el descubrimiento guiado para ser utilizadas por profesores de educación secundaria. Por otro lado, autores como Boakes (2008) se han hecho eco de las recomendaciones del NCTM, que sugieren que los niños deben explorar y desarrollar su comprensión de las formas y estructuras geométricas mediante el uso de materiales concretos y manipulativos, postulando la papiroflexia como un medio adecuado y con gran potencial. Si a todo esto le añadimos la tradición que tiene la papiroflexia en nuestra tierra (Iranzo & Goñi, 2017), no podíamos desperdiciar la ocasión de poner en práctica una propuesta al respecto.

La experiencia que describimos aquí tuvo lugar en el marco del grupo de trabajo *Ciencia 1516* en el IES Cabañas de La Almunia de Doña Godina, en el curso 2015-2016. Los estudiantes de 3.º de ESO (14-15 años) debían preparar una sesión en la que explicaban cómo plegar un modelo básico a alumnos de 1.º de Educación Primaria (6-7 años). De esta manera, los estudiantes de secundaria, habiendo practicado previamente los pliegues, asumieron el papel del maestro, teniendo que usar varios recursos lingüísticos, tanto verbales como no verbales.

El toque lingüístico

La papiroflexia tiene su propio lenguaje. Aunque hoy en día uno puede aprender a doblar muchos modelos a través de sitios web con vídeos, como Youtube, o con fotos paso a paso del proceso, como en http://www.origami-instructions.com, los diagramas estándar usan una serie de símbolos internacionalmente aceptados. Este lenguaje simbólico va acompañado de un lenguaje verbal muy específico, con expresiones como *pliegue en montaña*, *pliegue en valle*, *pliegue oreja de conejo*, etc. Estos símbolos y expresiones tienen una correspondencia casi unívoca con el lenguaje formal de la geometría. Sin embargo, para conseguir un objetivo didáctico y que el aprendizaje sea significativo, el diseño de la actividad debe contemplar tareas en las que se destaque esta relación (Cipoletti y Wilson, 2004).

El contexto

La experiencia se llevó a cabo en el marco de un proyecto de colaboración entre el Instituto de Educación Secundaria y el Colegio de Primaria en la misma ciudad, muy cerca el uno del otro. Durante dos días, los estudiantes de secundaria se encargan de preparar sesiones de ciencias y matemáticas para los estudiantes de primaria. Es una actividad que ilusiona a todos, muy motivadora, un aspecto que se demuestra en la participación de los estudiantes cuando preparan los materiales y el guion de la sesión. Típicamente, como el grupo de trabajo surge del Departamento de Ciencias, son experimentos de física o química. En esta ocasión, para el caso de la asignatura de Matemáticas, apostamos por introducir la papiroflexia a los niños de 6 años.

Los estudiantes de 3.º de ESO a los que se dirigió la actividad apenas habían visto geometría en cursos anteriores. Además, la geometría que habían estudiado hasta ese momento se había reducido prácticamente a las fórmulas de áreas y volúmenes simples. Esta fue una de las causas por las que estos estudiantes presentaban dificultades en cuestiones tales como la de seguir un razonamiento deductivo, como calcular el área de la superficie de un cono. En tales argumentos, términos tales como *eje de simetría*, *sección*, *ángulo*, *perpendicular*, se utilizan comúnmente. Por ejemplo:

PROFESOR. ¿Qué forma tiene la superficie lateral de un cono?
ESTUDIANTES. ¿Triángulo?

En aquella intervención, solamente un alumno acertó a decir que no era un triángulo, sino una especie de *abanico*.

PROFESOR. Intentaremos calcular el área, ya que es una fracción de un círculo más grande, de radio igual a la generatriz del cono.
ESTUDIANTE. ¿La generatriz? ¿Pero para esto no hay fórmula?
PROFESOR. Un cono puede verse como un triángulo rectángulo que gira alrededor del eje que forma uno de sus catetos. Los catetos son los lados adyacentes al ángulo recto del triángulo, y son perpendiculares. El otro lado es la hipotenusa, que es la que cuando gira, construye la superficie lateral, por lo que se llama generatriz.
ESTUDIANTE. ¿Pero seguro que no hay una fórmula para esto?

Este ejemplo muestra que los estudiantes no se sienten cómodos con este tipo de lenguaje. Por esta razón, aunque la papiroflexia ya se había utilizado en algunas de las sesiones habituales (construcción de un dado a partir de un cubo modular para fines de aprendizaje de la probabilidad), el proyecto de colaboración con la escuela primaria constituyó una oportunidad para poner en juego las habilidades lingüísticas de los estudiantes.

Se eligió un modelo fácil de plegar, que permitiera ajustar la duración de la actividad, ya que hay niños que terminan antes que otros, gracias a una psicomotricidad bien trabajada. Por esta razón, seleccionamos la peonza *Yami's Origami Spinning Top*, disponible en <http://www.spitenet.com/origami//pdf/SpinningTop.pdf.> Además, una vez que está terminada, en la parte superior se puede dibujar un motivo y jugar con ilusiones ópticas. Por otro lado, aunque inicialmente se trabajó en el aula de secundaria con el diagrama simbólico, hay un vídeo de YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=NMfIzNNwfjo> donde se puede revisar el proceso de plegado.

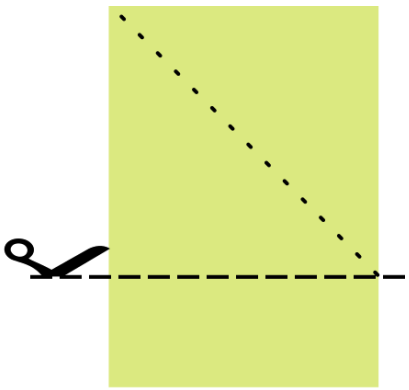
La actividad

Se estructuró de la siguiente manera:

Fase 1. La semana antes de ir al colegio de Educación Primaria, los estudiantes de secundaria dedican una sesión con su profesor para trabajar el plegado de la peonza a partir del diagrama. Aquí es donde se relaciona de forma explícita el lenguaje utilizado en la papiroflexia con el vocabulario formal de la geometría, empleando términos como *punto*, *bisectriz*, *perpendicular*, etc. A modo de ejemplo:

PROFESOR. Hagamos un cuadrado a partir de una hoja de papel rectangular.

Algunos estudiantes comienzan a sacar la regla para medir distancias y hacer el cuadrado.



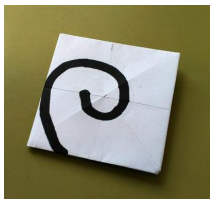
PROFESOR. Mejor que usar la regla, construyamos el cuadrado plegando. Comenzamos doblando a lo largo de la bisectriz de una de las esquinas. De esta manera, estamos trasladando la longitud que mide un lado del cuadrado en el lado perpendicular.

Este tipo de pliegue para trasladar distancias equivale a la realización de un arco con el compás, por lo que también establece un vínculo entre estas dos formas de hacer geometría.

PROFESOR. Ahora tenemos el cuadrado, realizado a partir de una de sus diagonales. Siguiendo el diagrama, ¿qué toca?

La sesión prosigue tratando de avanzar en el diagrama realizando preguntas a los alumnos. Por ejemplo, se necesita doblar por las mediatrices, es decir, los pliegues que se forman al unir los

puntos medios de los lados opuestos. Una vez que la peonza está terminada, se sugiere que dibujen diferentes motivos de inspiración geométrica, como espirales, para ver el efecto que se produce al girar la peonza.



Fase 2. Los estudiantes de secundaria practican en casa y tienen algunos días para preguntar al profesor. Preparan el material para la actividad: hojas de colores de las dimensiones apropiadas y herramientas de dibujo.

Fase 3. La experiencia en sí fue una sesión de 30 minutos en el colegio de Educación Primaria. Los estudiantes de secundaria (hasta 15) fueron acompañados todo el tiempo por su profesor. Del mismo modo, el maestro de primaria también estuvo presente. Cada alumno de secundaria era responsable de uno o dos niños (había 24 niños), asistiéndolos alrededor de una mesa en grupo pequeño. La premisa de la actividad era simple: enseñar a los niños cómo doblar una peonza, sin el diagrama. El trabajo de los dos docentes fue simplemente colaborar distribuyendo el material y organizando los grupos y la única consigna adicional para los estudiantes de secundaria fue que, antes de mostrar físicamente cómo eran los pliegues, deberían describir lo que iban a hacer a los niños.

Los estudiantes de secundaria tuvieron que expresarse en términos similares a los empleados en la sesión de preparación, pero adaptando el vocabulario para los niños de primaria. Por ejemplo, una estudiante explicó los pasos necesarios para formar el cuadrado y sus bisectrices:

> ESTUDIANTE. Ahora tomamos la hoja y queremos hacer un cuadrado. Doblamos esta esquina a la mitad, en dos partes iguales. Doblamos la parte sobrante y la cortamos. Por lo tanto, tenemos un cuadrado, todos los lados iguales, ¿ves? Luego lo doblamos por la mitad, de dos maneras, verticalmente (haciendo el gesto con la mano) y horizontalmente...

Los grupos que terminaron pronto la peonza hicieron otra, dibujando diferentes motivos (espiral, rueda de colores, disco de Benham, etc.), tratando así la diversidad característica del aula.

Consideraciones finales

Los estudiantes se implicaron en la realización de la actividad, lo que aumentó su motivación hacia la asignatura. En definitiva, este tipo de tareas sigue la pauta marcada por los currículos y las recomendaciones internacionales, como las del NCTM (2000), entre otras:

- Comunicar su pensamiento matemático de forma coherente y clara a sus compañeros, profesores y otras personas.
- Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.
- Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas.

En este caso, la experiencia descrita fue una actividad voluntaria, ya que los estudiantes de secundaria podían elegir entre preparar una sesión de matemáticas o una sesión de ciencias, por lo que el rendimiento de los estudiantes no influía directamente en la calificación del curso. Sin embargo, los estudiantes participantes tuvieron la oportunidad de profundizar el uso del lenguaje para describir rotaciones, simetrías, figuras, etc., un aspecto que se evaluó en diferentes pruebas y actividades de clase, abordando algunas de las dificultades que tenían a este respecto.

Referencias bibliográficas

BOAKES, N. (2008), «Origami-mathematics lessons: Paper folding as a teaching tool», *Mathitudes,* 1(1), 1-9.

CAÑADAS, M. C., MOLINA, M., GALLARDO, S., MARTÍNEZ-SANTAOLALLA, M. J., y PEÑAS, M. (2010), «Let´s teach geometry», *Mathematics Teaching,* 218, 32-37.

CIPOLETTI, B., y WILSON, N. (2004), «Turning Origami into the Language of Mathematics», *Mathematics Teaching in the Middle School,* 10(1), 26-31.

HULL, T. (2013), *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics, Second Edition*. CRC Press.

IRANZO, J. A., y GOÑI, M. (2017), «Zaragoza–Papiroflexia-Matemáticas», *Entorno Abierto, 14*, 15-18.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: Author.

Rectángulos de Mondrian. Rectángulos para pensar

por
David Serrano
(CRIE Venta del Olivar, Zaragoza)

En el CRIE Venta del Olivar llevamos participando en el programa Conexión Matemática de manera activa durante más de cinco cursos. Cada año, proponemos una actividad matemática en nuestras programaciones. Intentamos que sea algo diferente de lo habitual que hacen en sus clases. Casi siempre hemos apostado por tareas manipulativas (Pentominós, el juego del Awalé, Lógica Matemática, Magia matemática…) porque suelen conseguir una mayor motivación por parte de los chavales. Este año hemos cambiado un poco el planteamiento, y hemos buscado reflexionar sobre lo que hacemos, tratando de hacerles pensar. Nuestros alumnos están acostumbrados a tareas sencillas, que se resuelven rápidamente, pero cuando tienen que pensar, se dan cuentan que no tienen ese hábito y pronto tiran la toalla. Pensamos que es necesario trabajar en esta línea.

Este curso, después de unos sencillos acertijos para calentar/motivar, les planteamos dos propuestas relacionadas con los rectángulos.

— Por un lado, les preguntamos *cuántos rectángulos hay* en una sencilla figura. La respuesta es relativamente sencilla. Pero lo que nos interesa, es que nos cuenten cómo han llegado a la solución. No basta con decir el numero 18. Intentamos ahondar en la necesidad de ser ordenados al realizar la tarea, aplicar alguna regla para no repetir ni dejarse rectángulos por contar.

— *Rectángulos de Mondrian.* Esta actividad, la descubrí en el blog de David Barba, *PuntMat*, una fuente inagotable de ejercicios de mucha calidad, aunque la idea original es de *MathPickle*.

Después de ilustrar quién fue el pintor Mondrian (les contamos su transición del impresionismo al cubismo y la simbología de este último) les proponemos la tarea. En ocasiones nos ayudamos del juego Shikaku para que *pillen* la dinámica. El objetivo es dividir la parrilla en rectángulos diferentes.

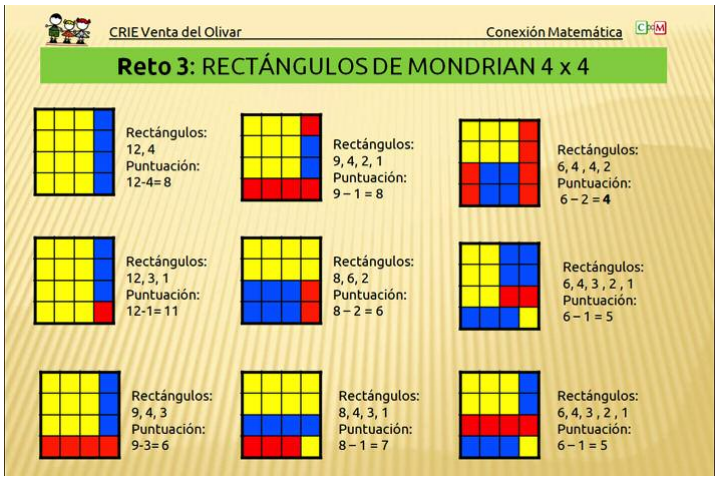
1.º Hay que rellenar *toda la figura* con rectángulos. Aceptamos que los cuadrados también lo son.
2.º Cada *rectángulo debe ser diferente*. No podemos pintar uno de 4x1 y otro de 1×4. Pero sí uno de 4×1 y otro de 2×2. Anotar el área de los rectángulos obtenidos y comprobar que *no se repite el rectángulo.*
3.º Buscamos la menor *puntuación*. La puntuación de una pintura es el área del mayor rectángulo menos el área del menor rectángulo.
4.º Pintar los rectángulos de forma que dos colores iguales no se toquen entre sí y que se utilice el menor número de colores.

Después de mostrar en la pizarra el caso de la parrilla 3x3 mediante preguntas a los alumnos, propondremos trabajar de forma individual sobre la parrilla 4x4 (creemos que es la mejor para empezar en 5.º curso), buscar todas las divisiones posibles, respetando los dos primeros requisitos, anotando su puntuación y coloreando con el menor número de colores.

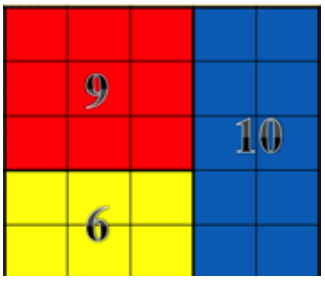
Les proponemos encontrar las nueve formas diferentes que hay sin repetir figuras. Muchas veces repiten combinaciones, por ello, creemos que es necesario anotar dentro de cada rectángulo o a un lado, el área, de esta forma

es más fácil comprobar si nos hemos repetido/equivocado.

Una vez analizado el caso de la cuadrícula de 4×4, vamos a intentar descubrir en la parrilla 5×5, la combinación de rectángulos *mejor*, es decir, la que tiene una puntuación menor (ya que abordar todas las posibles sería muy largo y aburrido). Un buen consejo es buscar que el área del rectángulo mayor no sea muy grande y que el pequeño, sea lo más grande posible. Cada alumno busca una solución, y nos dice su puntuación, si hay alguien que ha obtenido una mejor, les animamos a que la descubran por sí mismos.



Así vamos probando con parrillas cada vez más grandes. Con 5×5, 6×6, 7×7, 8×8… La parrilla de 10×10 ya requiere práctica o cursos superiores a 5.º-6.º, que son con los que trabajamos en nuestro centro. Pienso que puede ser interesante para ESO.



Lo curioso del caso es que la menor puntuación no sigue una progresión lógica para parrillas cada vez mayores. A veces es mayor y otras menor.

Tenemos todo el material disponible online, tanto la presentación que usamos en clase como las fichas que usan los alumnos y un guion de la clase para el profesor.

Hemos comprobado que no es una tarea tan motivante como otras que habíamos realizado otros cursos para el total de la clase, a la mayoría les gusta, pero hay alumnos que *desconectan*. Pero aquellos alumnos que descubren la esencia del juego, podrían estar horas. Nuestra labor radica en animar a esos alumnos que se rinden prematuramente, para intentar que se enganchen.

Creemos que esta propuesta responde al objetivo que nos habíamos marcado de hacerles pensar y que además profundiza en el área de la geometría, disciplina que tenemos bastante descuidada en la Educación Primaria.

Viajando en avión

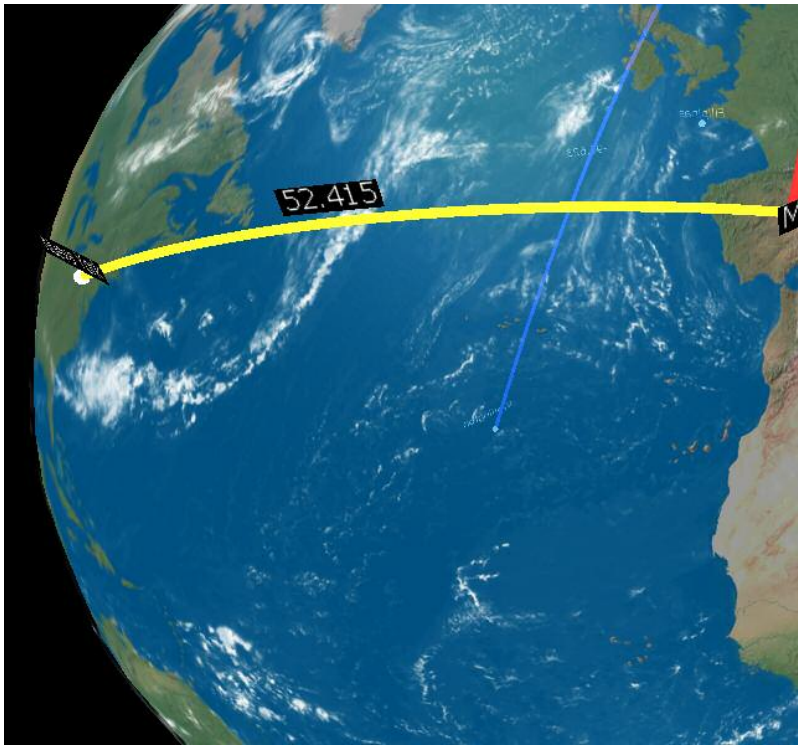
por
Pedro Latorre García
(CPEPA Marco Valerio Marcial, Calatayud)

Hoy he encontrando entre los muchos papeles y cuadernos del adorable cuarto de los ratones de mi centro un cuadernillo titulado *Matemáticas para adultos, una propuesta motivadora y eficaz*. Me he llevado una pequeña decepción al ojearlo, el material no era malo, pero tanto los contenidos como la forma de trabajo eran terriblemente convencionales. Como las metas que quiero que alcancen mis alumnos no son demasiado concretas (todavía no me atrevo a escribir en la programación: el alumno sonreirá en clase) el adjetivo eficaz no sirve a mis propósitos. Sin embargo, la motivación es uno de los puntos claves de mi actividad docente.

Uno de los objetivos principales de las actividades que desarrollo es motivar a unos alumnos altamente desmoralizados. Obviamente muchas veces no lo consigo y sigo caminos trillados. Estos dos últimos meses he impartido probabilidad y ha sido un absoluto desastre por segundo curso consecutivo. Todavía no me he librado completamente del miedo a dejar de impartir contenidos que más adelante los alumnos puedan necesitar, por supuesto en el ámbito escolar. Una buena comunicación entre todos los profesores permitiría no estar pendientes de contenidos que casi siempre se olvidan y centrarse en desarrollar habilidades más duraderas.

La aplicación que presento no la he podido utilizar en clase por falta de tiempo (sigo resolviendo ecuaciones, *sorry*) y está en una fase inicial de desarrollo. Como la presentada en el artículo anterior, está realizada con mi querido *Three.js* y pretende que los alumnos trabajen en un sencillo entorno digital: un editor de textos junto con un navegador web. La forma de uso es sencilla. Hay que introducir las coordenadas geográficas de una serie de ciudades y, después, indicar si queremos que aparezca la ruta geodésica entre dos de ellas. El programa dibuja el arco de circunferencia máximo entre dos puntos e indica la medida en grados del mismo.

Una sencilla propuesta de trabajo colaborativo en grupo con esta aplicación consiste en crear rutas entre cinco o seis ciudades con origen y final en la localidad de nuestro centro. Los componentes del grupo se pondrán de



acuerdo en elegir las ciudades y cada uno, o por parejas, realizarán una ruta. Posteriormente calcularán la longitud total del trayecto comparando los resultados obtenidos. También se puede determinar el tiempo total para realizar la travesía. La utilización de un mapamundi con los husos horarios es un buen complemento para esta actividad.

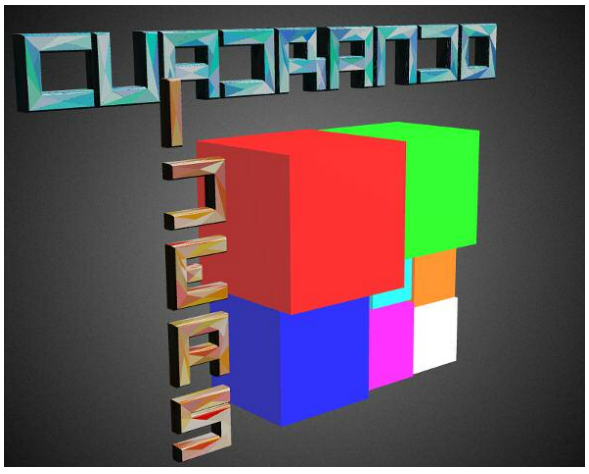
A primera vista, una de las grandes pegas de esta aplicación es la necesidad de introducir la información escribiendo en un archivo de texto y no sobre la propia página web de forma gráfica. Esa funcionalidad puede ser implementada, pero al margen del esfuerzo para realizar esa tarea, según mi criterio la escritura en un lenguaje estructurado es una competencia que debe practicarse. Es un primer paso para aprender a trabajar en un lenguaje de programación. En este caso hay un bloque que define un lugar con su nombre y sus coordenadas y otro que define un camino con los números de los lugares inicial y final, y el color del tramo.

```
data.js
//Inicio del lugar 1
 num++; data[num] = {};

 //Escribe la latitud y longitud del lugar
 var latitud = 40; var longitud = -3;

 //Escribe el nombre del lugar
 var nombre = "Madrid";

 data[num].nombre = nombre; data[num].latitud = latitud; data[num].longitud = longitud;
 //Fin del lugar 1
…
//Inicio de la ruta 1
 num++; data[num] = {};

 //Escribe el número del lugar inicial y del final
 var ini = 1; var fin = 3;

 //Escribe el color del camino. 1: rojo, 2: naranja, 3: amarillo, 4: verde, 5: azul, 6: violeta
 var color = 1;

 data[num].ini = ini - 1; data[num].fin = fin - 1; data[num].color = color - 1;
 //Fin de la ruta 1

data[num].coor = coor; data[num].pos = pos; data[num].rot = rot; data[num].color = color;
```

Si hay alguien interesado en trabajar con sus alumnos con esta sencilla aplicación puede pedirme los archivos a través del formulario de la web de conexión matemática:

<http://conexionmatematica.catedu.es/contacto/>.

Cuadrando ideas



Casi está concluida nuestra última joya de la corona, la exposición *Cuadrando ideas*. El punto de partida surge del material que la Sociedad Balear de Profesores de Matemáticas preparó para las JAEM celebradas en Palma de Mallorca entre el 2 y el 5 de julio de 2013. El desarrollo de una exposición con actividades manipulativas es extremadamente laborioso, pero los autores estamos convencidos por experiencia propia de que merece la pena. En este caso la elaboración de todos los materiales se ha dilatado cerca de dos años.

Todos los materiales, salvo los manipulables, se encuentran en <http://conexionmatematica.catedu.es/cuadrando/>.

Semana matemática en Castejón de Sos

por
Carolina Rueda Pérez
(IES Castejón de Sos, Castejón de Sos)

Define, compara, observa, clasifica, descubre, relaciona, interpreta, explica, deduce, demuestra, aplica, construye, completa, analiza, selecciona, organiza, replantea, ordena, modifica, combina, generaliza, comprueba, revisa, corrige, decide… ¡Y cuántas más! ¡Y cuántas veces al día en nuestra profesión repetimos estas palabras una y otra vez! Palabras con significados que nos ayudan a enseñar y que nos conducen en el aprendizaje. Palabras con las que damos al alumnado herramientas para comprender mejor las matemáticas, pero que en muchas ocasiones lo que sus maravillosos cerebros recogen no enlazan de manera positiva con las matemáticas. Todas estas definiciones que pueden llegar a interpretar como difíciles y complicadas, en la semana matemática, se convierten en juego, aprendizaje y diversión.

En la semana del 11 al 15 de diciembre de 2017, llegó a nuestro instituto la exposición *Naturales como tú,* con la que los alumnos tuvieron la suerte de compartir unos días llenos de talleres y juegos relacionados, no sólo con los números, sino también con la geometría, el aprendizaje, la diversión…

Durante las semanas previas a la exposición se trató de organizar y adornar el centro con numerosas aportaciones de los alumnos con la colaboración de varios departamentos. Uno de nuestros objetivos principales en esta semana era hacer un poco más fuerte, si cabe, la relación interdepartamental.

Desde Lengua el alumnado de 1.º de la ESO redactó y creó con ayuda de su profesora Eva Antón, textos matemáticos que posteriormente se colgaron por los pasillos del instituto. En la materia de Matemáticas de 2.º de la ESO con Regina Alcaraz y en colaboración con el departamento de Plástica con Chema Escalona, se estudiaron los cinco sólidos platónicos y fabricaron con ellos unos magníficos poliedros estrellados que hasta hoy son decoración de nuestro centro. Estos poliedros se trabajaron en Dibujo Técnico en dos dimensiones, y con técnicas de papiroflexia dando volumen a los mismos. En 3.º ESO, desde mi asignatura, desarrollando habilidades manuales y reforzando conceptos de la geometría, realicé un taller con palillos y lanas. El objetivo nuevamente era pasar del plano a lo tridimensional. El alumnado tuvo que dar unas cuantas vueltas a sus cabezas para averiguar cuantas figuras planas podía atar, dando forma a unas bonitas estrellas. Por otro lado, haciendo uso de un triángulo de Sierpinski realizado con latas recicladas en la exposición de Conexión Matemáticas del año pasado, por los alumnos del Taller de Matemáticas de 2.º con ayuda de Silvia Naval, este año el alumnado de 4.º ha podido analizar el concepto de fractal con María Belén Herrada. Entre todas estas aportaciones y muchas otras voluntarias que vinieron a manos del propio alumnado, vestimos el centro con motivos matemáticos. Quisiera nombrar en este artículo a Vega Artero, una brillante alumna que no deja de sorprenderme

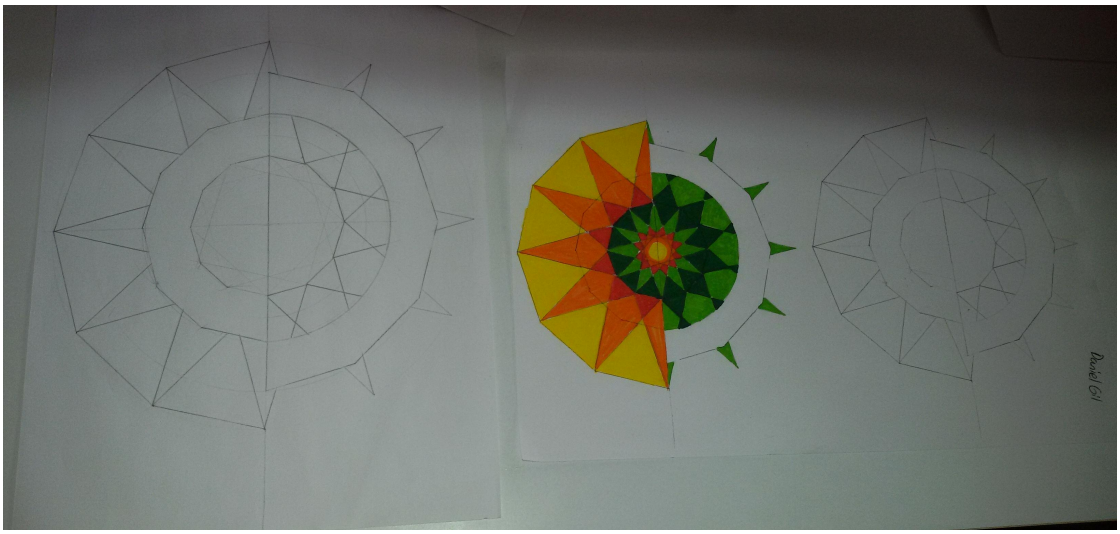
cada año con sus hipótesis matemáticas, sin dejar de pensar en cómo descifrarlas, este año intentó encontrar una constante entre raíces cuadradas y cúbicas.

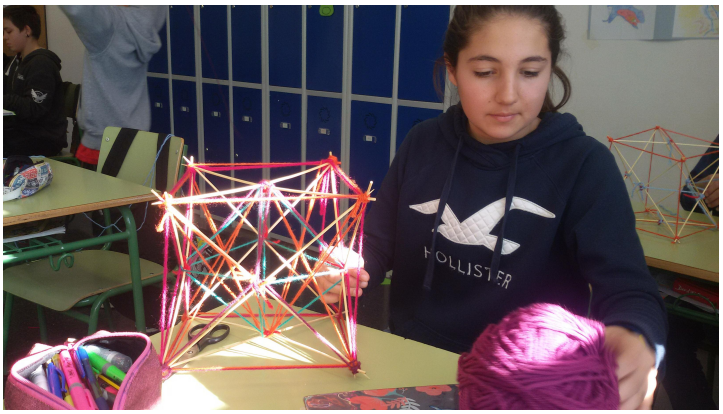
Gracias a todas estas aportaciones y talleres, nuestro centro se encuentra hasta fecha de hoy decorado y en una perfecta conexión matemática.

El primer día de la exposición llegó a nuestro centro Daniel Sierra, estrenando con su taller *Tocando la cuarta dimensión,* nuestra semana matemática. El alumnado de tercer y cuarto curso pudo disfrutar y acercarse a una dimensión espacial que nunca antes había visitado, manipulando y construyendo con pajitas de refrescos un cubo en cuatro dimensiones. El segundo día preparamos una yincana matemática que consistía en contestar o encontrar respuestas dentro de los carteles de la exposición *Naturales como tú.* El tercer día, los alumnos de 1.º de la ESO tuvieron que ensayar y preparar una clase magistral que presentarían al día siguiente a sus compañeros de 5.º y 6.º de Primaria. Así pues el jueves fueron al CRA Alta Ribagorza, donde Felisa Torres nos estaba esperando con sus alumnos, impacientes todos por recibir a sus antiguos compañeros, quienes con presentaciones orales explicaron a los más pequeños todo lo que habían aprendido sobre los poliedros y sólidos platónicos, desde sus significados más místicos hasta las más modernas construcciones arquitectónicas, la relación entre ellas y con nuestra vida real. Tras la exposición, prepararon un taller de gominolas con el que practicaron y endulzaron la tarde. Y para terminar volvimos a realizar el taller de tetraedros cruzados formando nuevas estrellas. Todo el material que prepararon los alumnos del instituto se quedó en el centro de primaria para que pudieran seguir trabajando con ellos en posteriores clases. Fue una tarde en la que tuvimos el placer de compartir, enseñar y crear conocimiento entre dos centros educativos, los cuales mantienen por muchas causas una gran unión, gracias en parte a las matemáticas.

Y el último día, de la mano de Adolfo Sancho, a quien ya conocíamos de la anterior semana matemática, presenciamos una simpatiquísima forma de enseñar a nuestros alumnos de 3.º y 4.º la teoría de grafos, utilizando una conexión muy curiosa entre *Matemáticas, Facebook y Torrente IV,* con la que os puedo asegurar, disfrutamos mucho tanto alumnos como profesores.

En esta semana sacamos el mayor partido al lado más positivo que tienen las palabras con las que comienzo este artículo. Son unos días en los que a los profesores que impartimos esta, a veces tan complicada materia, se nos facilita material y recursos que hacen que nuestros alumnos disfruten aprendiendo y jugando con números, geometría, álgebra… y que casi sin ninguna duda no olviden de un año para otro, porque si algo he podido comprobar durante mi corta estancia en la docencia, es que de esa semana sí que se acuerdan.





Antes de finalizar, quiero agradecer a nuestra compañera Dorota ProKopowicz, quien desde el departamento de Filosofía siempre está dispuesta a involucrarse en nuestro mundo matemático, ayudando y facilitando a los alumnos para que puedan participar en concursos como microrelatos matemáticos y radionovelas matemáticas.

El año pasado, en una de mis clases, hablé a mis alumnos de 1.º de la ESO de cómo las matemáticas se han convertido en lo que hoy día son, y que gracias al carteo entre ilustres matemáticos podemos saber tanto. Así que les pedí que escribiesen una carta al azar con alguna cuestión puramente matemática, y las enviamos a otro centro, del que tras meses de espera recibimos respuesta. El entusiasmo de los alumnos al descubrir tan antiguo medio de comunicación fue tan divertido que este año he querido compartirlo y somos varios centros los que nos estamos carteando y conectando matemáticamente.

Con todo esto quiero destacar que en esa semana no se acaba la conexión interdepartamental. Desde el IES Castejón de Sos seguimos trabajando para hacer que los alumnos participen en actividades que les aporten aprendizajes y satisfacción, animándoles y apoyándoles a presentarse y participar en diferentes proyectos que la SAPM lleva a cabo. Gracias a vosotros y la implicación del alumnado y del profesorado del centro podemos hacerlo posible.

Desde el departamento de matemáticas he de decir que es un verdadero placer poder participar, organizar y colaborar en actividades como estas. Muchísimas gracias por ofrecernos la oportunidad de enseñar y mostrar una forma diferente de ver el apasionante mundo de las matemáticas.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Mario Escario Gil (IES Pirámide, Huesca).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Web: <http://sapm.es>

Marzo de 2018

ISSN: 2386-8821e

BY NC SA