Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 26
Enero de 2019

Con lo que respecta a la Sociedad el inicio de 2019 ha venido marcado por la asamblea general de socios, que se celebró el 10 de enero. En ella, como ya anunciamos, se debía producir un cambio de junta directiva. Y así fue..., aunque no hubo un cambio completo.

De la junta anterior, dejaron sus puestos Alberto Elduque, M.ª Ángeles Esteban, Salvador Renieblas, Josep Rochera, Julio Sancho y José Maria Sorando. Como presidente ha sido un auténtico lujo poder contar con su colaboración. Gracias a su trabajo pudimos, en su momento, reflotar la SAPM y, después, hacerla navegar cada vez con más brío. Por supuesto, seguimos contando con ellos.

Nos mantenemos en la nueva junta Ricardo Alonso, M.ª Ángeles Arroyo, Mario Escario y el firmante. Cuando vimos claro que no iba a haber una candidatura totalmente nueva, nos planteamos realizar una *transición suave*. Se trataba de renovar la junta pero manteniendo una cierta continuidad. De esa forma, nos parecía que sería más *fácil* convencer a algunas personas para que se sumaran a la causa.

Hemos tenido suerte y han pasado a formar parte de la nueva junta Pablo Beltrán, Julio Bernués, Esther García, Maider Goñi, Pedro Latorre, José María Muñoz y José Miguel Rubio. De entrada, bajamos la media de edad de la junta, pero el nivel de sus miembros se mantiene muy alto.

De los cargos con *nombre específico* Maider ocupa la tesorería, Pedro la secretaría, M.ª Ángeles es la vicepresidenta y yo sigo como presidente. Al igual que la anterior junta, esta cojea en la presidencia. Por mi parte, va a ser el tercer mandato consecutivo, y agradezco a los compañeros su paciencia.

No cabe ninguna duda que cuando esta nueva junta se asiente se planteará nuevos retos con los que conseguir que la Sociedad siga creciendo en socios y actividad.

De momento, este curso mantenemos las actividades ya consolidadas. Los días 22 y 23 de febrero se celebra nuestra III JEMA, ya se ha hecho la inscripción de centros en la XXVIII OMA, el VI Concurso de Radionovelas Matemáticas está en marcha, en breve, se abrirá la inscripción en los concursos IV Torneo de Tangram y III Concurso de Figuras Imposibles, y ya están en marcha las semanas matemáticas en los centros del programa Conexión Matemática.

Daniel Sierra Ruiz
Presidente de la SAPM

Sorio Interactivo

Crónica del seminario Experiencias de aula con Geogebra

Raíces y cuadrados

Soneto a Pitágoras

Matemáticas sobre Berlín

La paradoja del cumpleaños II. Nueva portada de la web de CM

únete
a la SAPM
click

PALEXCO
A Coruña

3 a 6 julio 2019

JAEM 19

UN ATLÁNTICO QUE SUMA

CONVOCA: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ORGANIZA: AGAPEMA

COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

Crónica del seminario *Experiencias de aula con Geogebra*

por

Antonio M. Oller Marcén

(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Entre los días 14 y 16 del pasado diciembre tuvo lugar en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) de Castro Urdiales el seminario *Experiencias de aula con GeoGebra*. Se trata del cuarto de una serie de seminarios organizados conjuntamente por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y por el Instituto Geogebra de Cantabria (IGC) y se centró en la difusión de ejemplos y en el análisis y debate de las experiencias de aula más interesantes que se están llevando a cabo en España utilizando el software GeoGebra.

La actividad contó con la participación de 34 representantes de distintas sociedades de profesores e institutos GeoGebra tanto a nivel nacional (con participantes provenientes de Andalucía, Aragón, Asturias, Cantabria, Castilla la Mancha, Castilla y León, Cataluña, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia y Navarra) e internacional (con aportaciones de México y Portugal).

Figura 1. Foto de familia de los participantes. Cortesía de la organización

Desde el punto de vista científico, el seminario se estructuró en torno a cuatro sesiones, cada una de ellas centrada en un bloque de contenido del currículo. Así, la primera sesión se dedicó a Números y Álgebra, la segunda a Geometría, la tercera a Funciones y la cuarta a Estadística y Probabilidad. Cada una de estas sesiones constaba de dos conferencias de 45 minutos cada una seguidas de un debate. Además, se presentaron en varias sesiones paralelas un total de 15 ponencias breves de 20 minutos cada una. Finalmente, el seminario se cerró con una conferencia de clausura y con una sesión de debate que se dedicó a la presentación de conclusiones, valoraciones y propuestas. A continuación vamos a describir y comentar brevemente las conferencias de cada uno de los cuatro bloques. Por cuestiones de espacio, no podemos profundizar en los contenidos de cada una de las conferencias. El lector interesado puede encontrar las presentaciones y otros materiales adicionales en la web de seminario <http://rrrgeogebra.tk/>.

Figura 2. Agustín Carrillo y Tomás Recio

Números y Álgebra

En este bloque se presentaron dos conferencias: *Programa de Creación de Recursos Educativos Abiertos (CREA) de Matemáticas basados en GeoGebra* y *GeoGebra en un ámbito STEM: visualización algebraica en espacios naturales*.

La primera de estas conferencias, a cargo de Javier Cayetano Rodríguez y José Pedro Martín Lorenzo, se dedicó a presentar el proyecto CREA (crea.educarex.es) puesto en marcha durante el curso 2017-2018 por la Junta de Extremadura. Dentro del área de Matemáticas este proyecto consistió en la creación de unidades didácticas basadas principalmente en construcciones con GeoGebra. En la primera parte de la ponencia, Javier Cayetano describió la estructura y las características generales de los recursos diseñados (interactivos, autoevaluables, multinivel, etc.). Por su parte, José Pedro Martín describió la aplicación efectiva de algunos de los recursos diseñados, en concreto el relacionado con la divisibilidad, con un grupo «difícil» de 12 alumnos de 1.º de ESO en un pequeño instituto del pueblo cacereño de Torrejoncillo.

La segunda conferencia, impartida por Martha Ivón Cárdenas Domínguez, presentó un proyecto STEM realizado por alumnos de 2.º de ESO en el Instituto Sant Pol de Mar titulado *Diseñemos espacios verdes*. El uso de GeoGebra en este proyecto entra en juego en la denominada fase de exploración y se utiliza para abordar tareas relacionadas con la modelización y la visualización 3D. Cabe destacar que los alumnos hicieron uso de la realidad aumentada (AR) en algunos de sus modelos creados.

Las dos conferencias nombradas presentaron el uso de GeoGebra en dos contextos diferentes. En el caso de Sant Pol de Mar se trata de un centro que habitualmente trabaja por proyectos con metodologías muy activas. En esta situación, GeoGebra es una herramienta más usada por los alumnos al desarrollar sus proyectos. Por su parte, en el centro de Torrejoncillo el uso de GeoGebra se inserta en una metodología docente más tradicional, actuando como elemento motivador y como sustituto de la pizarra o el libro de texto. Ambos centros, no obstante, comparten el disponer de una dotación tecnológica actualizada y un profesorado interesado en su uso.

Geometría

En este bloque se presentaron dos conferencias: *GeoGebra: un doble papel en Educación Primaria* y *Número Pi, fractales y cúpulas geodésicas para el aula desde GeoGebra*.

La primera conferencia fue impartida por María Elena Segade Pampín y María Cristina Naya Riveiro, ambas docentes en el Grado en Educación Primaria de la Universidad de La Coruña. Se presentaron ejemplos en los que GeoGebra es utilizado para llevar a cabo actividades de formación con los futuros maestros tanto desde el punto de vista matemático como didáctico. De este modo se puso de manifiesto el doble uso, para la docencia y para la investigación, que se puede hacer de GeoGebra en el ámbito de la formación de profesorado.

La segunda conferencia corrió a cargo de Débora Pereiro Carbajo. En ella se presentaron varias experiencias concretas llevadas a cabo en el IES Escolas Proval de Nigrán (Pontevedra). Se trata de varias actividades de temática variada que pretendían lograr, además de la formación, la implicación de los estudiantes. Para enfatizar este hecho la conferenciante estuvo acompañada de una de sus alumnas «destacadas» que, incluso, nos comentó personalmente y de primera mano su visión sobre las actividades realizadas. Es interesante señalar que en las experiencias presentadas GeoGebra se combinaba siempre con el uso de materiales manipulativos. En el caso de las cúpulas geodésicas, por ejemplo, se simulaban y visualizaban con GeoGebra pero, adicionalmente, se construyeron de forma real en un taller de arquitectura y geometría aplicada.

Estas dos conferencias, además de ilustrar los variados niveles en los que puede utilizarse GeoGebra, permiten observar que su uso puede encajar tanto en el diseño sistemático de actividades de formación o investigación educativa, como en la realización de experiencias de carácter más lúdico.

Funciones

En este bloque se presentaron dos conferencias: *Funciones: más allá del libro de texto* y *GeoGebra como recurso para el estudio de las familias de funciones*.

La primera conferencia fue pronunciada por Rubén Jiménez Jiménez. En ella se hizo un repaso a la presencia de las funciones en el currículo castellanoleonés, en especial a los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables, para después presentar experiencias de aula concretas. Concretamente, se mostraron gran cantidad de applets pensados para que el «usuario final» pueda incorporarlos directamente a su práctica docente de manera simple y sencilla. Además, se mostraron ejemplos en los que GeoGebra se integra con otras herramientas como Exelearning o Moodle.

La segunda conferencia, impartida por María Teresa Navarro Moncho y Onofre Monzó del Olmo, se dedicó a presentar algunas de las actividades relacionadas con la modelización matemática llevadas a cabo dentro de un grupo de investigación en la Universidad de Valencia. Uno de los aspectos más interesantes del trabajo presentado es el uso de datos reales (adquiridos por los propios alumnos). También cabe destacar la integración de GeoGebra con otras herramientas tecnológicas y la importancia dada a la manipulación concreta antes del uso de GeoGebra.

En estas dos conferencias, además de elementos ya aparecidos y comentados anteriormente, se puso de manifiesto la posibilidad y facilidad de integrar GeoGebra con otro software a múltiples niveles. Tanto desde el punto de vista educativo (con Exelearning, Moodle, etc.) como desde el punto de vista de su uso con herramientas de recogida de datos, grabación de video, realidad aumentada, etc.

Estadística y Probabilidad

En este cuarto y último bloque, las conferencias se titularon *Estadística y probabilidad* y *Actividades de Estadística y Probabilidad con GeoGebra*.

En la primera conferencia, leída por Antonio Gámez Mellado, se presentaron diversas actividades y experiencias de aula llevadas a cabo en la asignatura de Estadística del Grado en Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo de Producto de la Universidad de Cádiz. Se mostraron diversos objetos de aprendizaje (*learning objects*) diseñados bajo las siguientes características: interoperabilidad, adaptabilidad, accesibilidad, reusabilidad, durabilidad y granularidad.

La segunda conferencia, que fue impartida por Rafael Pérez Laserna, también se dedicó a presentar una serie de actividades para alumnos pero en este caso de ESO y Bachillerato. El conferenciante puso de manifiesto que el uso de GeoGebra en este contexto, además de para captar la atención de los alumnos, sirve para centrar el discurso del docente en las explicaciones e interpretaciones de resultados por encima de los meros cálculos numéricos.

En estas dos conferencias se puso de manifiesto que GeoGebra puede utilizarse también en este bloque del currículo que, en ocasiones, queda parcialmente olvidado. Además, resultó interesante ver cómo GeoGebra puede ser utilizado a nivel universitario, más allá de la formación de profesorado, para tratar conceptos matemáticos complejos.

Algunas ponencias breves

Como ya hemos señalado, además de las 8 conferencias anteriores, el programa incluía 15 ponencias breves desarrolladas en sesiones paralelas. Dado que este cronista carece del don de la ubicuidad, sólo vamos a comentar brevemente aquellas a las que pudo asistir personalmente y que le parecieron especialmente interesantes. Nuevamente en la web del seminario se dispone de información detallada sobre todas las ponencias presentadas.

La primera ponencia que vamos a comentar se titula *¿Y si hubiesen dejado GeoGebra en las Oposiciones 2018?* y su autor es Claudio Martínez Gil, profesor en el IES Alhama de Corella. Como indica el título, se presentó la resolución de 4 problemas de las pasadas oposiciones de Secundaria. En el siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/FvQyGSNT> se puede ver un libro GeoGebra con las resoluciones de 40 problemas de las oposiciones de diferentes comunidades autónomas. Es interesante plantearse la reflexión de si en algún futuro más o menos cercano será posible que los problemas de oposición puedan abordarse de forma oficial con herramientas tecnológicas.

Otra ponencia que merece la pena destacar corrió a cargo de Emilio Seoane de la Losa. El título de la misma, *GeoGebra en Infantil y Primaria* ya pone de manifiesto su temática. En la ponencia se mostraron ejemplos de actividades para alumnos de Infantil y Primaria que hacen uso de puzles y fotografías (especialmente de autores cántabros) con las que se trabajan aspectos como como la psicomotricidad, la educación vial o el cálculo mental. En los videos que se pudieron ver durante la ponencia se pudo apreciar que los niños disfrutaban mucho de las actividades, implicándose en ellas y participando muy activamente.

Finalmente, por su carácter novedoso destacamos la ponencia de José Luis Muñoz Casado titulada *Realidad aumentada con GeoGebra*. En el enlace<https://www.geogebra.org/m/kcwfax5a> se pueden encontrar materiales relacionados con la ponencia en la que se mostraron interesantes ejemplos del uso de GeoGebra en contextos de realidad aumentada. Desafortunadamente, esta herramienta solo está disponible de forma «fácil» para iOS. Los usuarios de Android tenemos que trabajar un poco más (ver información en el enlace anterior). En cualquier caso, parece claro que estas herramientas abren un nuevo mundo de posibilidades al uso de GeoGebra.

Figura 3. Realidad aumentada y GeoGebra.
Cortesía de José Luis Muñoz Casado

Conferencia de clausura

La conferencia de clausura se tituló *Proyectos atractivos en ESO* y corrió a cargo de Rafael Losada Liste. El profesor Losada es uno de los pocos españoles certificado oficialmente como *International GeoGebra Institute Trainer* (formador de formadores en GeoGebra), participa en el proyecto InterGeo, es miembro del grupo G4D y fue coautor del Proyecto Gauss.

En su intervención, Losada presentó numerosos ejemplos de posibles proyectos a realizar con alumnos en el aula. Los proyectos se agruparon, según su distinto grado de dificultad, en proyectos de diseños, proyectos de modelos y proyectos de robots.

Los proyectos de diseños variaban desde la reproducción por parte de los alumnos de diseños estáticos ya creados (la bandera de Corea del Sur, por ejemplo) o la recreación de escenarios matemáticos en 2D (teorema de Pitágoras) y 3D (esferas de Dandelin), hasta la utilización de GeoGebra para crear un gráfico vectorial de su firma (utilizando splines, por ejemplo).

Los diseños de modelos, como su nombre indica, involucran la modelización geométrica de objetos cotidianos (utilizando las posibilidades de la realidad aumentada) o de la naturaleza (conchas de moluscos, por ejemplo) y la modelización de problemas cotidianos o de la física. En este tipo de situaciones puede resultar formativo abordar la deconstrucción de escenarios complejos para analizar el procedimiento de construcción de los mismos.

Finalmente, el conferenciante presentó una serie de proyectos que él denomina «de robots» y que involucran, en cierto modo, el uso de sistemas dinámicos ya sea para buscar puntos de equilibrio o para explorar dinámicamente ciertas situaciones. De este modo se puede abordar, por ejemplo una «demostración dinámica» del recíproco del teorema de Pitágoras según un esquema como el siguiente:

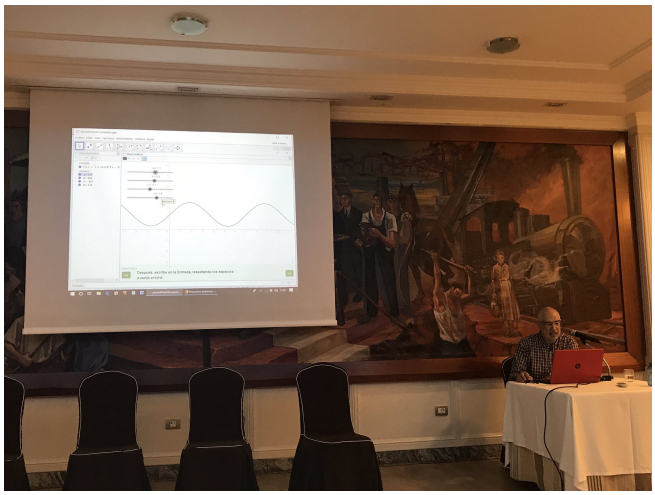


Figura 4. Rafael Losada

— Partimos de un segmento $AB = c$.
— Se toma un punto P arbitrario llamando $PA = a$ y $PB = b$. Calculamos $D = |a^2 + b^2 - c^2|$.
— Se mueve el punto P una «distancia pequeña» hacia el «norte», «sur», «este» y «oeste» (se mejora el proceso si se consideran 8 o más direcciones en cada paso). Para cada uno de los cuatro puntos obtenidos se recalcula D.
— El punto que tenga el menor valor de D de los cinco anteriores es el nuevo punto P.
— Repetir el proceso.

De este modo el punto P original se va moviendo de forma automática hasta alcanzar una posición en la que $D = 0$ y en la que se comprueba que el triángulo ABP es rectángulo en P.

Algunos comentarios finales

Tanto durante los debates posteriores a las conferencias de cada uno de los bloques, como en la sesión que siguió a la conferencia de clausura se produjeron diversas y enriquecedoras conversaciones. A continuación, se detallan asistemáticamente algunos comentarios y reflexiones de este cronista:

— Actualmente el uso de GeoGebra va mucho más allá de la geometría, pudiendo utilizarse prácticamente en cualquiera de los bloques del currículo de forma significativa.
— No es necesario ser un experto en el uso del software para incluirlo en la práctica docente. El hecho de la «socialización» de GeoGebra a través de geogebra.org permite el acceso a multitud de recursos ya creados y testados que se pueden utilizar libremente. En este sentido, no hay problema en utilizar materiales creados por otros, con las referencias debidas, claro está.
— No obstante lo anterior, la búsqueda sistemática de recursos en la plataforma geogebra.org es complicada por la ausencia de un sistema de indización, palabras clave, etc. En ese sentido, algunos expertos señalan que ya se está trabajando en ese tema.
— También resulta destacable la versatilidad de GeoGebra en cuanto a los niveles educativos en los que puede utilizarse: desde infantil a universidad y en formación de profesorado y no solo para labores docentes, sino también de investigación educativa.
— Como nota negativa, queda la sensación de que el número de usuarios activos de GeoGebra entre el profesorado está estancado, así como una cierta percepción de que es difícil conseguir que ciertos perfiles docentes se inicien en el mismo. A este respecto, Tomás Recio señaló que quizás la realización de estudios «a gran escala» que puedan quizás mostrar de manera indudable las ventajas del uso de GeoGebra pudieran contribuir a ganar usuarios.

Para concluir, quién suscribe desea agradecer a la SAPM «Pedro Sánchez Ciruelo» la posibilidad de asistir a este seminario y aprovecha la ocasión para animar a los lectores de este boletín, si es que no lo hacen ya, a que diseñen sus propias actividades utilizando GeoGebra, a que las pongan a prueba con sus alumnos y a que las compartan con sus colegas tanto informalmente dentro de sus departamentos, como de manera formal en seminarios, JAEM, JEMA, etc.

Raíces y cuadrados

por

Ricardo Alonso Liarte

(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

El cálculo de la raíz cuadrada de un número no representa mayor problema teniendo una calculadora a mano. Es una tarea que se realiza en las aulas de forma más o menos habitual en la resolución de ejercicios y problemas. No es tan cotidiano, sin embargo, interpretar y utilizar la raíz cuadrada con sentido geométrico, más allá de algunos casos sencillos. Por ejemplo, raíz de dos representa la diagonal de un cuadrado de lado 1, la proporción en la que se basa la norma DIN. Raíz de 3 es el doble de la altura de un triángulo equilátero de lado 1. Raíz de 5 tiene que ver con el pentágono regular (y es el título de un programa de radio)… No todos los radicales ofrecen una interpretación geométrica notable, pero todos ellos se pueden representar a través de un segmento de una forma exacta.

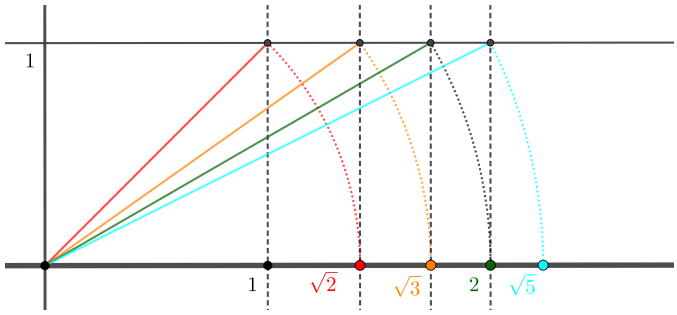


Figura 1

Para ello, sobre la recta numérica, se construye un cuadrado de altura 1 y base 1, cuya diagonal, raíz de 2, transportada sobre la recta, servirá de base para construir otro rectángulo de altura 1 y de diagonal raíz de 3. La repetición del procedimiento ofrece un método recursivo para ir representando geométricamente sobre la recta las raíces cuadradas de los números naturales (figura 1).

Otra disposición de los segmentos ofrece una visualización más llamativa: la espiral de Teodoro. Para obtenerla, partiendo de un triángulo rectángulo de catetos 1, la hipotenusa se convierte en la base del siguiente triángulo rectángulo con altura la unidad, y se repite el proceso (figura 2).

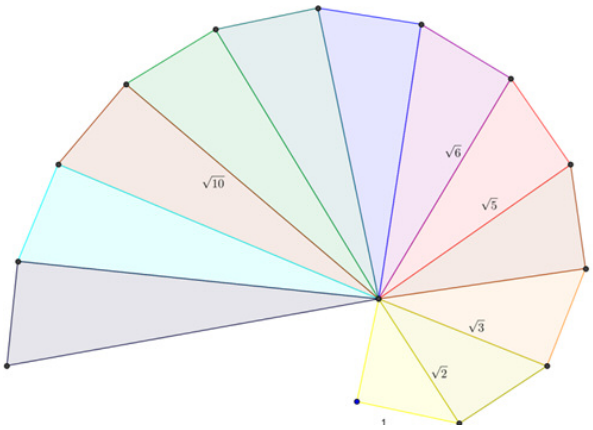


Figura 2

Una actividad que da un poco de color al cuaderno del alumnado y ofrece la posibilidad de desarrollar la creatividad artística consiste en proponer decorar la espiral, contextualizarla, hacer que forme parte de un dibujo. Y hay muchas posibilidades… (figura 3)

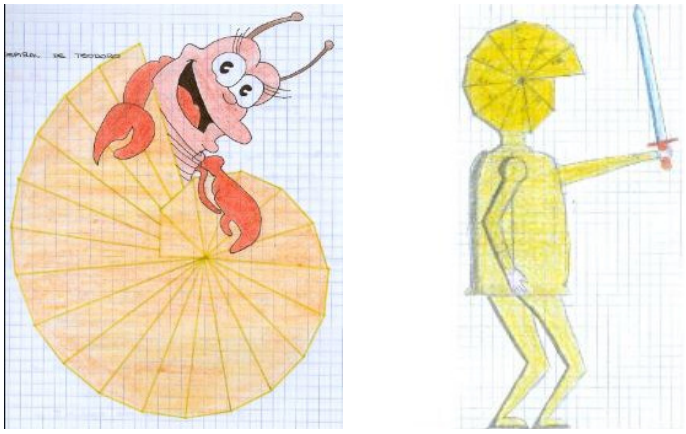


Figura 3

Este método ofrece una visión geométrica de la raíz cuadrada de los primeros números naturales, pero resulta poco eficaz para hallar el segmento que representa la de un número cualquiera. La obtención de su raíz cuadrada requiere apoyarse en la del número anterior, con lo cual el proceso es laborioso y demasiado largo para números grandes.

Existen otros procedimientos para hallar la raíz cuadrada de un número *n*, que mejoran claramente lo anterior. Uno de ellos es el siguiente (figura 4):

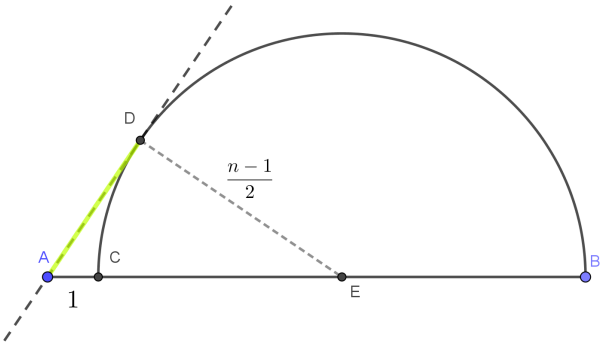


Figura 4

Se dibuja el segmento de longitud *n* (*AB*) y se señala el punto *C* a una distancia de una unidad de *A*. Se traza una semicircunferencia que tenga por diámetro el segmento *CB*, de longitud $n-1$. Desde el extremo *A* del segmento original se traza la recta tangente a la semicircunferencia en *D*. El segmento *AD* representa la raíz cuadrada de *n*.

Pero hay más posibilidades. A continuación se muestran dos en los que la aplicación de los teoremas del cateto y de la altura justifican las construcciones (figura 5):

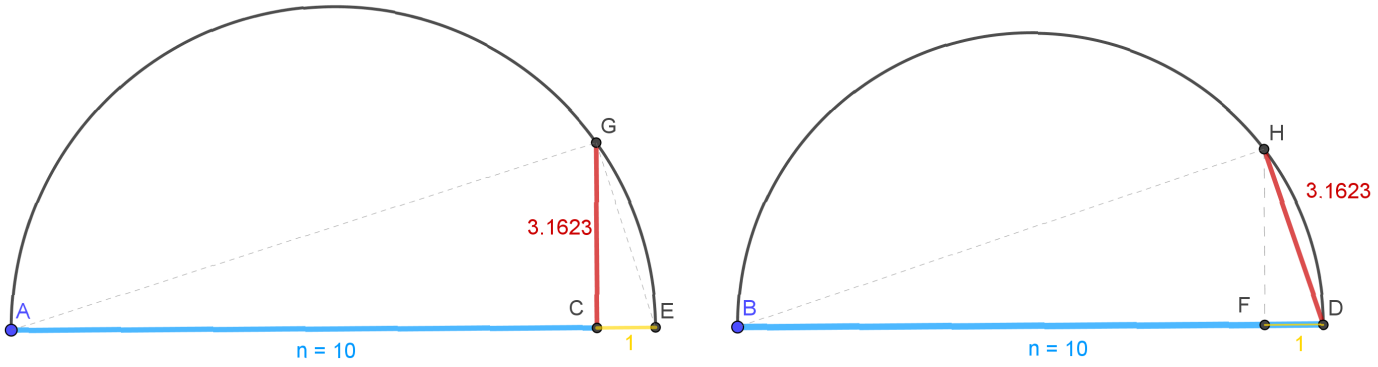


Figura 5

Al segmento de longitud *n* (*AC*), se le añade otro de longitud 1 (*CE*). La perpendicular a dichos segmentos por *C* corta en *G* a la semicircunferencia que tiene por diámetro *AE*. La aplicación del teorema de la altura para un triángulo rectángulo (y *AGE* lo es), demuestra que el cuadrado del segmento *GC* es el producto de *AC* y *CE*, es decir, *n*. Luego el segmento *GC* es la raíz cuadrada de *n*.

Otra manera de resolverlo consiste en aplicar el teorema del cateto a la construcción que parte del segmento de longitud *n*, *BD*, al que se sustrae un segmento de longitud 1 (*FD*). El cuadrado de *HD* equivale a *n*, y por tanto *HD* representa la raíz cuadrada de *n*.

Es decir, lo que se consigue con cualquiera de estos procedimientos es el lado de un cuadrado cuya área coincide con la de un rectángulo de lados 1 y *n*. Si en lugar de utilizar un segmento de longitud 1, se usa uno de otra longitud, el procedimiento ofrece un método para cuadrar un rectángulo de lados cualesquiera. Estos resultados aparecen en *Los Elementos*[1] de Euclides, como procedimiento para obtener la media proporcional de dos números. De la misma manera, hallar la media geométrica de dos números es equivalente a calcular la raíz cuadrada del producto de dichos números y el significado geométrico es el mismo, la cuadratura del rectángulo que tiene por lados los números dados.

El problema de la cuadratura de un rectángulo fue abordado por las matemáticas hindús. Los *Salbasutras*[2], textos que recogen procedimientos geométricos de construcción, exponen métodos para hacerlo. El siguiente está recogido en Gheverghese (1996:315-316), como el resultado del Sulbasutra de Baudhayana (entre el siglo V y II a. C.) (figura 6).

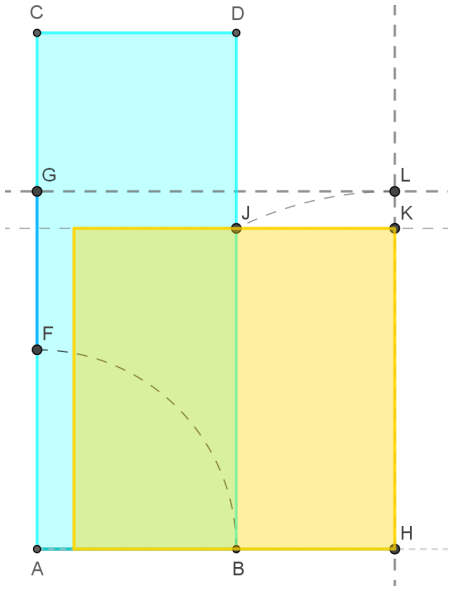


Figura 6

Partiendo de un rectángulo *ABCD*, y llevando el lado pequeño sobre el grande, se obtenien el punto *F*. Por el punto medio de *CF* (*G*) se traza una perpendicular al segmento. Por el punto *H*, obtenido al prolongar el segmento *AB* con otro igual al valor de *FG*, se traza una perpendicular a *AB* que interseca en *L* con la perpendicular del paso anterior. Con ayuda del compás se obtiene el punto $\mathcal{J}$ tal que $H\mathcal{J}=HL$. Trazando una perpendicular por $\mathcal{J}$ al lado *AC* se consigue el punto *K* que determina el lado del cuadrado buscado: *HK*.

El teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo $HK\mathcal{J}$ permite justificar la construcción,

$$HK^2 = H\mathcal{J}^2 - K\mathcal{J}^2 = AH^2 - BH^2 = (AH + BH)\cdot(AH - BH) = AC\cdot AB$$

Si se analizan ambas construcciones, la griega y la hindú, se puede ver que existe una relación entre ellas que permite construir el segmento de la misma manera. Si el rectángulo tiene lados de longitudes a y b, los dos métodos construyen un segmento de longitud la semisuma de los lados, que luego se convierte en el radio de la semicircunferencia que es hipotenusa del triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es la semidiferencia y el otro el segmento buscado (figura 7).

¿Y cómo encaja Japón en todo esto?

Japón comenzó el periodo Edo en el siglo XVII con una etapa de paz y aislamiento frente a Occidente. Este periodo de paz propició el resurgimiento de las artes y la cultura japonesa. Y fue en ese momento cuando comenzaron a aparecer en los templos y santuarios tablillas con contenidos matemáticos, los *sangakus*, una mezcla de ofrenda, reto y arte. Se conservan en torno a las 800 tablillas.

Un resultado clásico de las matemáticas de la época Edo nos conduce de nuevo a la cuadratura de un rectángulo. Está recogido en una tablilla datada en 1820. Se consideran dos círculos de radios r y R, tangentes entre ellos.

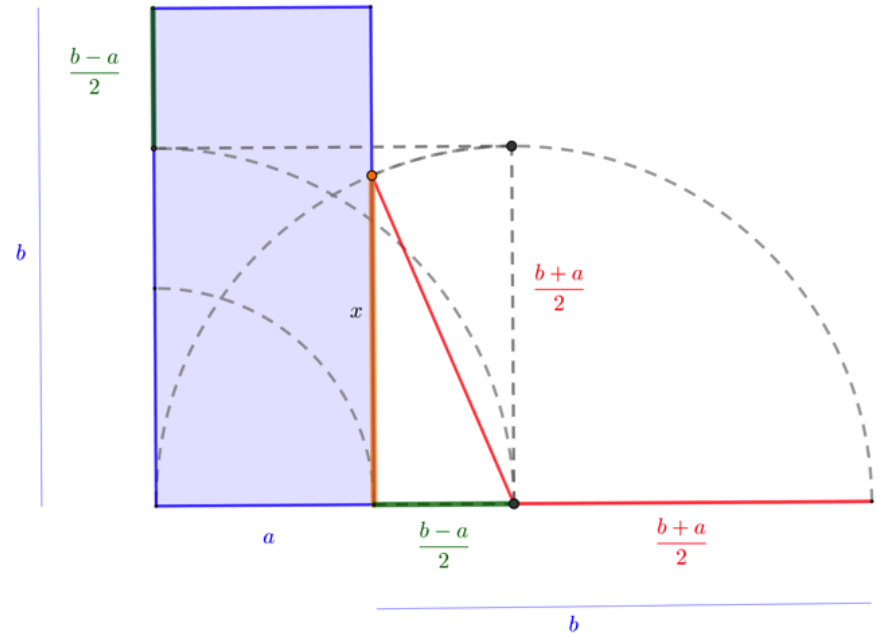


Figura 7

Hay que probar que la distancia entre los puntos de contacto de estos círculos con una tangente común a ellos, es igual a $2\sqrt{Rr}$ (figura 8).

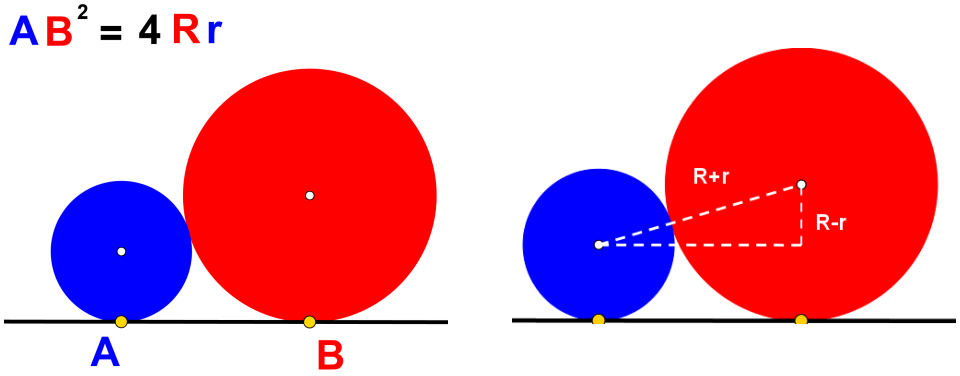


Figura 8

En definitiva es lo mismo que cuadrar el rectángulo que tiene por lados los diámetros de los dos círculos, 2r y 2R. Una construcción gráfica como la que hay en este aplet de Geogebra, lo visualiza y la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo, lo demuestra algebraicamente.

Otro ejemplo de cuadratura lo encontramos en el siguiente sangaku, datado en 1881. Algunos de estos problemas se repiten y son encontrados en diferentes tablillas, atribuidos a diferentes autores. La comprobación geométrica de que es cierta la relación se puede visualizar en este enlace (figura 9).

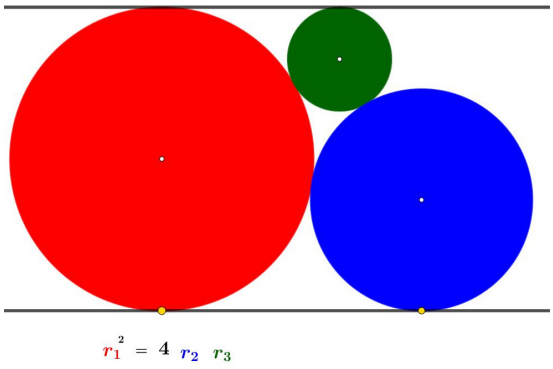


Figura 9

La cuadratura de un rectángulo, aparte de su sentido práctico, tiene un indudable aspecto estético a considerar, como se ha visto en estos ejemplos.

Referencias bibliográficas

BOYER, C. (2013), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.
GHEVERGHESE, J. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Pirámide, Madrid,.
HUVENT, G. (2008), *Sangaku. Le mystère des énigmes géometriques japonais,* Dunod, Paris.

1 Proposición 14 del Libro II. Proposición 35 del Libro III. Proposición 13 del Libro VI. Versión interactiva de Los Elementos: <https://www.c82.net/euclid/>.

2 *Sulbasutras* o «reglas de la cuerda». *Sulba* es una palabra que se refiere a las cuerdas utilizadas para realizar mediciones, y sutra significa un libro de reglas o aforismos relativos a un cierto ritual o a una ciencia. Son textos que recogen todo el conocimiento geométrico derivado de las planificaciones de templos y de la medición y construcción de altares. Se conservan tres versiones, todas ellas en verso, la más conocida de las cuales lleva el nombre de Apastamba. El carácter de estos textos, meras colecciones de reglas técnicas, excluía toda demostración. Por ello, lo único que puede conocerse son los resultados pero no los métodos y razonamientos que llevaron a ellos.

Soneto a Pitágoras

por

Andrés Martín Sánchez

(IES Emilio Jimeno, Calatayud)

En la primera estrofa del soneto,
sabrás calcular la hipotenusa:
Piensa recto y sin mente obtusa,
idea a partir de uno y otro cateto;

ten en cuenta la otra parte del reto
(**a**sí habla el de Samos, no Siracusa)
glosando el triángulo sin excusa
operando los lados del cuarteto;

restringe a naturales estas ternas
apellidadas como el mismo griego
sabio que inspira el de las cavernas.

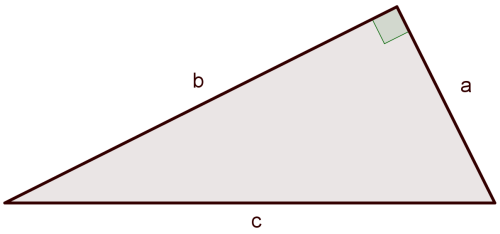
¿**F**allas aún de quién es el teorema?
¡**I**ncluso hay cientos de pruebas de apego!
Nueve iniciales más y fin del poema.

Comentarios sobre el enunciado del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que la condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto (catetos) sea igual al área del cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto (hipotenusa) (figura 1).

Es decir, si el triángulo es rectángulo se cumple esa condición aritmética.[1] Esto permite calcular un lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos.

Pero también recíprocamente, si en un triángulo se cumple que la longitud de uno de los lados al cuadrado es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.



$$\iff c^2 = a^2 + b^2$$

Figura 1. Ilustración gráfica del enunciado del teorema de Pitágoras

Es decir, el teorema de Pitágoras sirve también para clasificar triángulos en relación a sus lados. Así por ejemplo, un triángulo cuyos lados sean $(6, 25, 29)$ es obtusángulo ya que $29^2 > 6^2 + 25^2$. Sin embargo, el triángulo cuyos lados son $(1{,}5;\ 3{,}6;\ 3{,}9)$ es rectángulo pues $3{,}9^2 = 3{,}6^2 + 1{,}5^2$

Comentarios sobre las ternas pitagóricas

Hay una categoría dentro de los triángulos rectángulos, en que la longitud de los lados es un número natural. La longitud de los lados forman entonces ternas pitagóricas. Por ejemplo $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$ son ternas pitagóricas pues se trata de números naturales y verifican que $5^2 = 3^2 + 4^2$ en el primer caso y en el segundo que $13^2 = 5^2 + 12^2$.

Comentarios sobre las demostraciones del teorema

De la importancia del teorema de Pitágoras da fe el gran número de demostraciones que ha habido de él a lo largo de la historia. Incluso una de ellas es debida a Garfield, un presidente de los Estados Unidos.

La siguiente figura utiliza el tablero de ajedrez[2] para justificar el teorema en la manera en que algunos historiadores sugieren que el mismo Pitágoras lo demostró (figura 2).

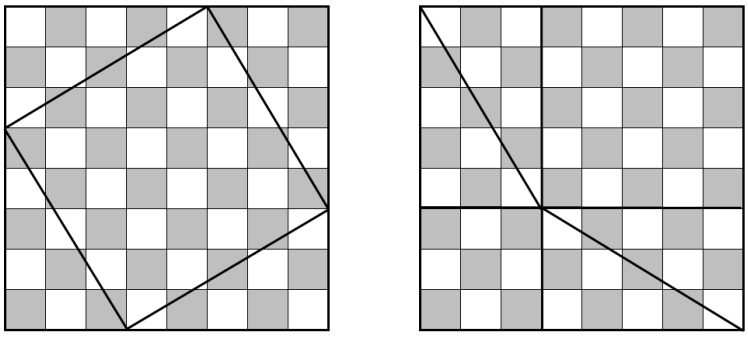


Figura 2: Demostración del teorema de Pitágoras utilizando el tablero de ajedrez

En efecto, el tablero de la izquierda contiene un cuadrado que lo divide en cinco partes: el propio cuadrado y cuatro triángulos rectángulos iguales. En el tablero de la derecha tenemos los mismos cuatro rectángulos, pero en lugar del cuadrado del tablero de la izquierda, hay dos cuadrados de dimensiones menores. El área de los triángulos en ambos casos es la misma. Esto significa que las partes sobrantes del tablero también tienen la misma área: un cuadrado en el primer caso y dos cuadrados menores en el segundo. Pero el cuadrado mayor se construyó sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo y los cuadrados más pequeños sobre los catetos.

Llegamos así a la conclusión de que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Guik, 2012).

Comentarios sobre Pitágoras y su influencia

Históricamente, Pitágoras (siglo VI a.C.) fue un filósofo y matemático de la Antigua Grecia, nacido en Samos, con gran inflluencia posterior. El filósofo Platón (429 a.C-347 a.C.), autor del mito de las cavernas, propone una demostración del teorema en su diálogo «Menón» (Meavilla, 2014: 58-65).

Otro matemático griego fue Arquímedes (287 a. C.- 212 a. C), nacido en Siracusa, considerado como uno de los mayores científicos de la antigüedad.

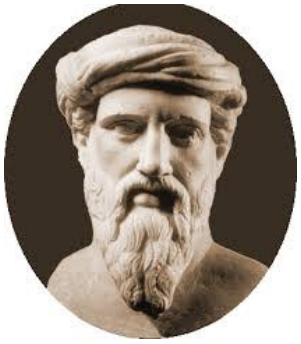


Figura 3. Pitágoras

Comentarios sobre el soneto

Un soneto es una composición poética compuesto por catorce versos de arte mayor, generalmente endecasílabos que se organizan en dos cuartetos y dos tercetos con rima consonante. Formalmente, en el soneto italiano, los dos cuartetos presentan un patrón de rima ABBA ABBA, mientras que los tercetos presentan variantes. En este soneto hemos utilizado la variante CDC EDE.

En cuanto al contenido, generalmente el primer cuarteto presenta el tema del soneto, que se desarrolla en el segundo cuarteto. El primer terceto ilustra alguna idea relacionada con los cuartetos y el segundo terceto concluye el soneto.

En este caso, las dos implicaciones del teorema son objeto de los dos primeros cuartetos. Si la longitud de los lados del triángulo rectángulo son números naturales, dicha secuencia se denomina terna pitagórica (primer terceto). El teorema es famoso y ha habido centenares de pruebas a lo largo de la historia de las matemáticas (segundo terceto).

Los poemas acrósticos consisten en composiciones que contienen letras (en este caso al principio) con las que se puede formar una palabra o frase. Esta clave acróstica se descubre en el último verso del soneto, concluyendo allí el soneto y aquí el artículo. FIN

Referencias bibliográficas

GUIK, Y. Y. (2012), *Matemática en el tablero de ajedrez. T.1: El tablero y las piezas*, Krasand.
MEAVILLA, V. (2014), *Aprendiendo matemáticas de los grandes maestros*, Almuzara.

1 En el artículo «Geogebra en el contexto de los Grupos Interactivos» del número 22 de *Entorno Abierto* se ilustra esta parte del teorema utilizando geometría dinámica.

2 Otros ejemplos de la relación del ajedrez y las matemáticas se presentan en el artículo «Matemáticas y Ajedrez en el Instituto» del número 19 de *Entorno Abierto.*

Matemáticas sobre Berlín

por
Carmen Soguero Pamplona
(Universidad de Zaragoza)

Mirar desde arriba no es mirar.
Hay que mirar a la altura de otros ojos.
El cielo sobre Berlín (Wim Wenders, 1987)

Para los que la conocimos a través de los ojos del cineasta Wim Wenders, Berlín era una ciudad en blanco y negro. La mirada de los ángeles nos mostraba un paisaje y paisanaje doblegado por el peso del telón de acero. El Muro, omnipresente. Los anhelos de sus gentes, encerrados en el devenir del día a día impregnado de tristeza, coloreado en grises.

Aunque estos tonos predominan en un cielo habitualmente encapotado, quizás hoy sus ángeles vean los colores de la ciudad. Todo ha cambiado bastante desde el rodaje de aquella historia. Espacios baldíos se han reconvertido (en el sentido de vuelto a convertir) en plazas recorridas por berlineses que las atraviesan apresurados con sus quehaceres. Del Muro quedan retazos, fragmentos conservados en algunos barrios para que no se borre su huella en la memoria común.

En nuestro viaje, conocimos Berlín desde la altura de nuestros ojos. ¡Y hay tanto para mirar! Es una ciudad que ofrece tantas facetas como intenciones podamos configurar en nuestra mirada. Como no puede ser de otro modo, el holocausto judío y el muro de la vergüenza (¡tan actual en otras geografías!) son omnipresentes. Pero también sorprendentes edificios, deliciosas cafeterías, bien surtidas cervecerías, avenidas que impresionan, extensos parques, rincones llenos de historia, pero rabiosamente enclavados en la actualidad, museos que cuentan con piezas mundialmente famosas... Y entre todo ello, por supuesto, podemos poner nuestra mirada en las referencias a las matemáticas que van surgiendo a nuestro paso.

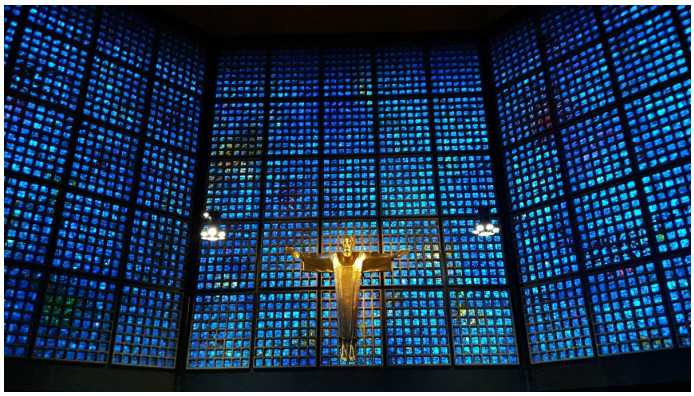
El primer encuentro es, como ocurre tantas veces, con la geometría, de la mano de edificios y entramados urbanos que recuerdan leyes y diseños.

Llegando a la cuidad en el tren que nos lleva desde el aeropuerto de Schoenefeld, impresionan las estructuras metálicas de las estaciones que jalonan los barrios de la extensa ciudad. Entre el bullicio de los pasajeros, son toda una invitación a captar la geometría con nuestra cámara.

Curvas y cuadrículas se alían en el acceso y los andenes de la Berlin Hauptbahnhof (Estación Central de Berlín) en una sinfonía de vidrios atrapados por redes metálicas que sugieren todo tipo de historias geométricas.

Y más de 20 000 cuadrados de vidrio azul conmemoran el bombardeo de la Kaisher Wilhem Gedachtnis Kirche, iglesia evangélica que fue seriamente dañada al final de la II Guerra Mundial. Situada junto al Bikini Berlin, centro comercial construido en la década de 1950, sus ruinas permanecen como recordatorio de los desastres de la guerra. Forma parte de un conjunto arquitectónico junto con un nuevo edificio que recoge el culto y una torre, que hace las veces de campanario. La modernidad, en estos edificios construidos también en los 50, vino acompañada, como tantas veces, de la geometría. Ambos con forma de prisma, la iglesia de base octogonal y la torre, hexagonal, están formadas por una trama cuadrada de hormigón en cuyos huecos se alojan más de 20 000 vidrios de color azul que tamizan la luz exterior al modo de las clásicas vidrieras y como única decoración de su interior, a excepción de un Cristo colgante. El efecto al entrar es impresionante.

Junto al complejo, un alto edificio de oficinas eleva sus fachadas sin esquinas desafiando la escasa altura del renovado Bikini Berlin.



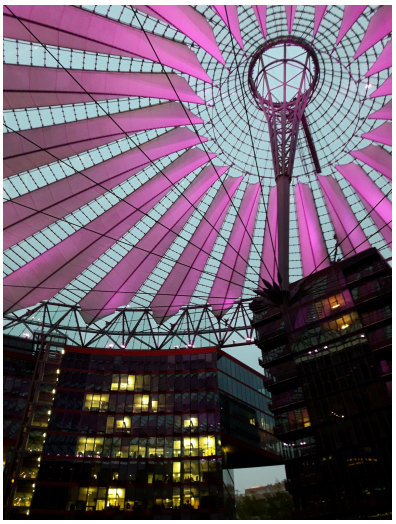
Edificios como éste, sorprendentes en sus formas, salpican toda la ciudad. La apertura de espacios urbanos a causa, tristemente, de los bombardeos a que fue sometida, han proporcionado a las corrientes arquitectónicas una oportunidad extraordinaria para desarrollar nuevos proyectos.

Especialmente hermosa nos pareció la Berliner Philharmonie, sede de la Orquesta Filarmónica de Berlín. Diseñado por el arquitecto Hans Scharoun y terminado en 1963, el edificio es, valga el símil, un concierto de líneas y superficies curvas que, con su sorprendente tono amarillo, reflejan la luz al atardecer creando un conjunto de espectacular belleza.

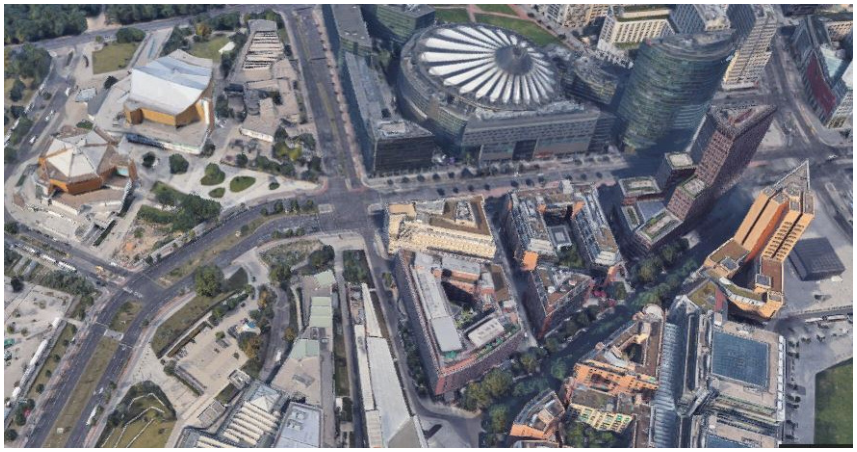
Junto a él, al otro lado de la Ben Gurion Straβe, encontramos el moderno Sony Center, centro comercial y punto de encuentro de jóvenes berlineses en el que llama poderosamente la atención la cubierta móvil entre las altas paredes acristaladas.

Ambos complejos están situados junto a Postdamer Straβe y Postdamer Platz, antes recorridas por el Muro que, tras su demolición, ha

permitido grandes avenidas. Y cerca también, se encuentra la Staatsbibliothek, la biblioteca en la que los ángeles de Wenders acompañaban a los berlineses en sus tiempos de lectura.

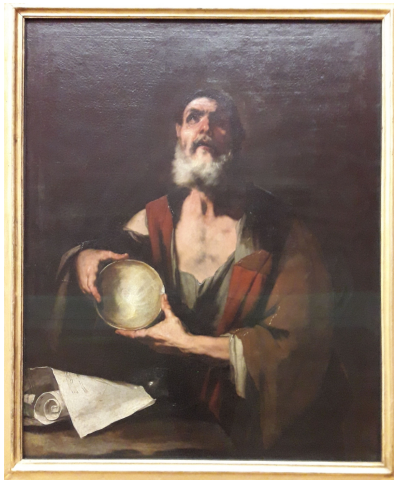


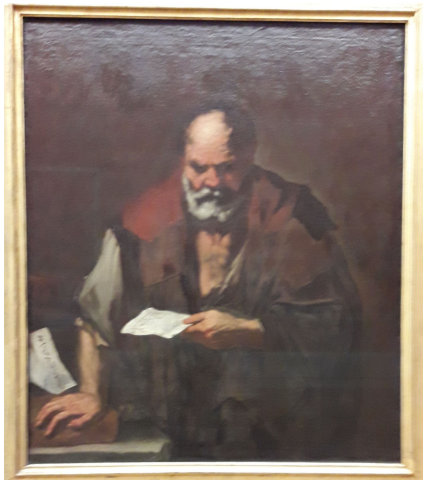
En un punto más alejado de la ciudad, en la Museumsinsel (Isla de los Museos), entre edificios neoclásicos, un capricho geométrico facilita el acceso al Deutsches Historisches Museum (Museo de Historia de Alemania). Su forma helicoidal no es nueva para una escalera, pero la cubierta acristalada con estructura metálica que la protege, juega a mostrarnos la esencia geométrica de la construcción.



Situada entre el Spree y el canal que discurre paralelo a él, esta isla alberga cinco de los museos más conocidos de la ciudad: Pergamonmuseum, Altes Museum, Neues Museum, Deutsches Historisches Museum y Bode Museum.

Junto con la Geldamergalerie, galería de pintura situada en el Kulturcenter, estos museos exponen las obras de arte más sobresalientes que recoge la ciudad.



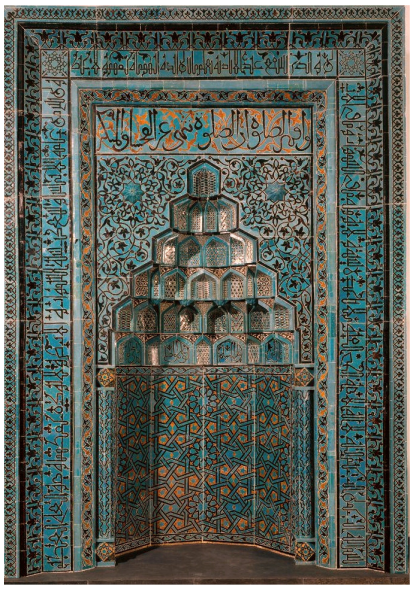


En esta última, entre obras de Caravaggio (impresiona el enorme *Amor Vincit Omnia*), Durero, Cranach el Viejo o Vermeer, entre otros artistas europeos, encontramos a dos matemáticos representados por el pintor del barroco italiano Luca Giordano: Arquímedes, con su cuenco que refleja la luz del sol junto a un escrito geométrico, y Euclides, con un documento aparentemente astronómico, por los ángulos que parecen estar dibujados. Ambos están expuestos juntos, y son fiel muestra del tenebrismo tan de moda en la pintura del siglo XVII.

Luca Giordano pintó a múltiples sabios y filósofos, al parecer por encargos de mecenas, e incluso se pueden encontrar otros «Arquímedes» que salieron de su pincel, como los que se encuentran en Padua (Italia) o en Senlis (Francia). Todos tienen en común su aspecto de ancianos místicos.

El Pergamonmuseum, es el de más renombre de la Isla. Los arqueólogos alemanes recorrieron las tierras de la actual Turquía y Oriente Próximo realizando excavaciones durante el siglo XIX y principios del XX. Un acuerdo de 1879 firmado por Alemania y el Imperio Otomano permitió el traslado de los restos arqueológicos más destacados que hoy se exhiben. En concreto, este museo se terminó de construir cuando ya las piezas estaban en Berlín,

adaptando la estructura del mismo al tamaño de los monumentos más espectaculares: la puerta de Isthar, el altar de Pérgamo, la puerta del Ágora de Mileto o la fachada de Mushatta. ¿Preservación o expolio?



En este museo, además de bastante material perteneciente a la ciudad del insigne Tales, encontramos múltiples muestras de la belleza asociada a las matemáticas en forma de azulejos decorativos. En la sección correspondiente al Arte Islámico, una serie de coloridos mihrab nos deslumbran con sus decoraciones geométricas. Pese a la armonía que destila el perteneciente a la mezquita de Maidan, en Kashan, Irán, con sus tonos azules sobre tostados, el más espectacular es el de traído desde la mezquita Beyhekim, en Konya, Turquía.

Construido en el siglo XIII, este mihrab tiene unas dimensiones de 3,95 m de alto por 2,80 m de ancho. El hueco de oración está delimitado por dos delicadas columnas cuyas bases y capiteles tienen forma de cuboctaedros, mientras que la parte inferior presenta decoración puramente geométrica.

Sus brillantes azulejos en colores turquesa, azul marino, negro, naranja y berenjena le confieren una vistosidad hipnótica.

En la misma sección, y siguiendo con la decoración geométrica, nos encontramos con la cúpula octogonal de madera que pertenecía a la Torre de las Damas del Palacio de Partal, en el complejo de la Alhambra de Granada.

La cúpula cuenta con una base cuadrada que se transforma en un octógono mediante la inserción de triángulos, y un poco más arriba, en un hexadecágono en el que se apoyan los correspondientes dieciséis trapezoides que la cierran.

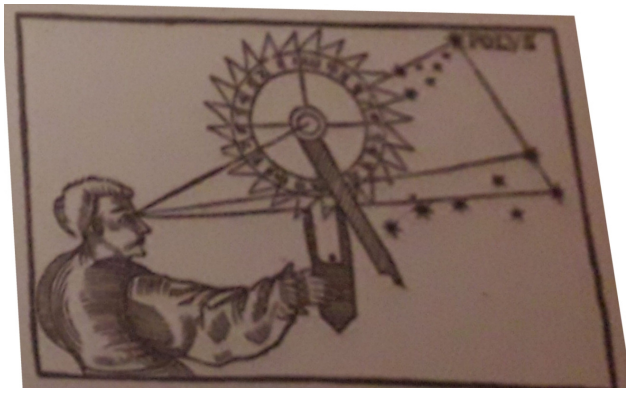
Sus dimensiones alcanzan los 2,5 m de altura y los 3,5 de diámetro.

Parece ser que, en 1885, el banquero alemán Von Gwinner compró el terreno de la Alhambra donde se encontraba el Palacio del Partal, que contenía la cúpula. Más tarde, cedió el palacio al Gobierno español a cambio del permiso para desmontarla y trasladarla a su residencia de Berlín. Ya en 1978, sus herederos la vendieron al Pergamonmuseum donde ahora se encuentra (*Discover Islamic Art* <http://islamicart.museumwnf.org>).

Un poco más adelante, en una sala de iluminación tenue, se descubre una preciosa colección de astrolabios, entre los que destacan los construidos en el siglo XVII por Muhammad Zaman.

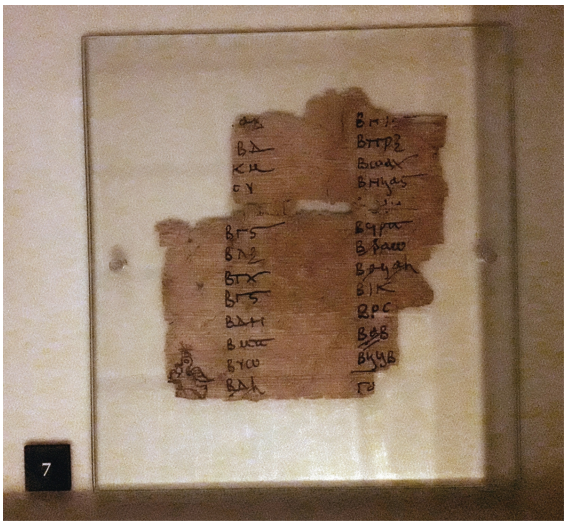
Pero lo que realmente provoca mi curiosidad es un plato de cerámica con los signos zodiacales dibujados y un agujero en el centro, fabricado también en el siglo XVII. ¿Será para clavar el gnomon y se tratará de un reloj? Curiosamente, la información disponible en las vitrinas propone cuatro posibles orígenes y usos para esta pieza.

La más interesante propone que sería parte de un nocturnal, un aparato que permitiría medir el tiempo a partir de la posición de las estrellas, como se indica en la ilustración del *Cosmographia*, de Petrus Apianus, documento de la misma época y que se encuentra en la Biblioteca de Berlín.



Pero no es la única propuesta, ya que también podría tratarse de una pieza del mecanismo de un calendario astronómico, atendiendo a las marcas que aparecen en su borde exterior. O parte de una mesa giratoria para adivinar el futuro, a juzgar por el pie que tiene en la parte posterior. O simplemente un objeto de adorno. Nuestra imaginación tendrá que elegir...

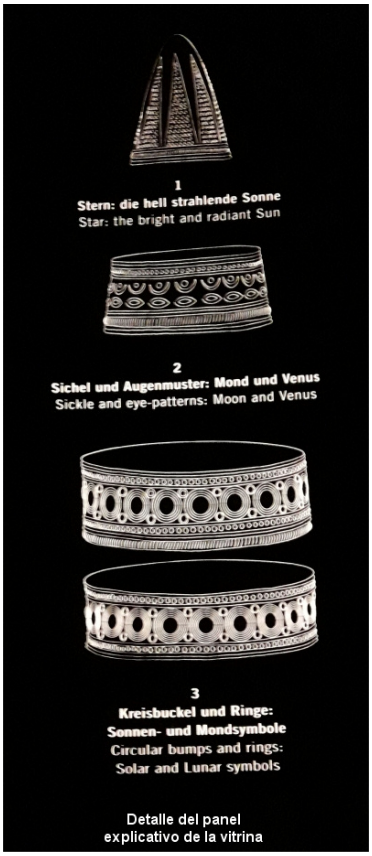
Si es fascinante (y agotador) el recorrido por el Pergamonmuseum, ¿cómo no acceder a los otros museos, tan cercanos? En el Neues Museum (Museo Nuevo), hay una gran colección egipcia. La estrella es el busto de Nefertiti. No es casual su fama, impresiona verlo de cerca en su perfección. Pero, volviendo a nuestra mirada matemática, una no deja de ver, en los múltiples frisos que conserva el museo, agrimensores que andan entre papiros con una cuerda entre las manos ¿Estarán marcando campos tras el desbordamiento del río? No lo indica en las cartelas, pero mi imaginación se desborda... El friso corresponde al año 2430 a. C. De nuevo me impresionó.



Como parte de la colección egipcia, protegidos por vitrinas y luces tenues, se pueden contemplar antiguos papiros dedicados a diversas disciplinas, incluidas las matemáticas. Hay textos escolares, incluso de nivel académico alto, vinculadas, probablemente a las necesidades de desarrollo de la topografía. Geometría, astronomía y tablas aritméticas, como la de la fotografía, dan cuenta de lo avanzado de esta ciencia en una época tan temprana.

Fuera ya de las salas egipcias, cuando pensaba que mi capacidad de admiración estaba saturada, llegamos al sombrero ceremonial de Berlín, realizado en oro y con una decoración que esconde un perfecto conocimiento de los calendarios solar y lunar. Aunque no está muy claro, parece que procede del suroeste de Alemania. Solo se conocen otros tres similares: dos también alemanes y un tercero francés. Está hecho de una sola pieza de oro, sin soldaduras, a golpes de martillo, y se data en la Edad del Bronce, es decir, tiene unos 3 000 años de antigüedad. Y su forma recuerda mucho a la de lo que conocemos como «un sombrero de mago».

Está totalmente cubierto de símbolos celestiales. La punta se cierra con los brazos de una estrella que representaría el Sol. Los patrones de la hoz y el ojo, representarían la Luna y Venus. Los círculos corresponderían a la Luna y al Sol. El ciclo del Sol determina la duración de las noches y los días y el de la Luna, reparte el año en meses y días. La duración del año marcada por la luna es 11 días más corta que la marcada por el Sol. La ornamentación del sombrero refleja el dominio de este conocimiento en aquella época y el ajuste entre el calendario solar y lunar. Los dibujos en relieve nos estarían mostrando un calendario. El número de círculos de ciertas bandas concretas mostraría los 12 ciclos lunares sumando 354 días. Sumando el número de marcas de otras bandas decorativas, obtendríamos los 365 días del año solar. Transcurren 19 años hasta que el año solar y el lunar vuelven a coincidir. En el sombrero está codificado el conocimiento de que se deben sumar siete meses lunares cada 19 años para ajustar ambos calendarios.



Detalle del panel explicativo de la vitrina

Efectivamente, si aproximamos el mes lunar a 29 días:

$29 \times 7 = 203$ días añadidos cada 19 años, lo que supone $203 : 19 = 10{,}68$ los casi 11 días de diferencia entre el año solar y el lunar.

Estos son solo algunos de los detalles que encuentra en Berlín nuestra mirada matemática. Podríamos comentar también el Reloj del Mundo, en la famosa Alexander Platz, o los motivos geométricos en algunos fragmentos del Muro en la East Side Galery, o el panel dedicado a los matemáticos polacos, como Banach y Steinhaus que se reunían en un café en la ciudad de Lviv donde discutían soluciones a diversos problemas matemáticos. Encontramos este panel en una exposición temporal junto a la Puerta de Brandeburgo.

Todo ello entre los constantes recordatorios de la historia reciente de la ciudad: el holocausto judío, la quema de libros, el horror de las pérdidas humanas de la guerra, el afán de libertad... todo está en Berlín.

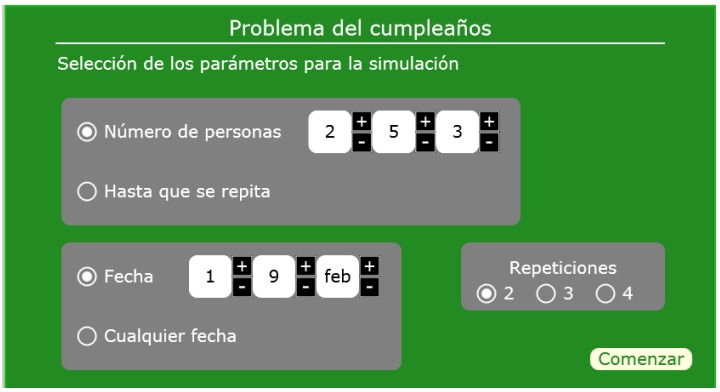
Esperando encontrar una ciudad en blanco y negro, encontramos una fuente insaciable de cultura, sorpresas, historia y, cómo no, belleza matemática.

La paradoja del cumpleaños II. Concursos en la web

por
PEDRO LATORRE GARCÍA
(CPEPA Gómez Lafuente, Zaragoza)

En el maravilloso libro *El hombre anúmerico* de John Allen Paulos podemos leer: «mientras es probable que ocurra algún hecho improbable, lo es mucho menos que se dé un caso concreto». Para aclarar este galimatías el autor utiliza un ejemplo del gran divulgador Martin Gardner: si giramos una ruleta con las letras del alfabeto y se apunta la letra que sale cada vez, la probabilidad de que salga la palabra PARADOJA o FRIOLERO es muy baja, pero la probabilidad de que salga cualquier palabra del diccionario es mucho mayor. "La conclusión es que sería muy improbable que los casos improbables no ocurrieran. Si no se concreta con precisión cuál es el acontecimiento a predecir, puede ocurrir un suceso de tipo genérico de muchas maneras distintas."

El problema del cumpleaños tiene un carácter genérico al no precisar un día concreto. Sin embargo, tenemos la tendencia a concretarlo. En esta versión incorrecta de la paradoja tratamos de contestar la pregunta: *¿cuántas personas son necesarias para que la probabilidad de que haya otra que cumpla años el mismo día que yo sea superior al 50%?* Como ya comentamos en el artículo precedente, solo se necesitan 23 personas para que la mitad de las veces haya una coincidencia en un día cualquiera, mientras que para la cuestión que acabamos de plantear hacen falta 253, salvo en el caso del 29 de febrero, en el que son necesarias 1000.



En la pequeña aplicación desarrollada (enlace) podemos resolver la generalización de la paradoja, encontrando el tamaño mínimo de un grupo para que haya 3 o 4 coincidencias con una probabilidad superior a 0,5. Para que haya un trío, el valor teórico es 88. Con el simulador vamos a utilizar como estimador la media de la distribución del número de personas necesarias para que aparezca una triple coincidencia. Después de 100 000 simulaciones el valor medio obtenido es 88,54. Para un cuarteto, la respuesta teórica es 187 y la media es 187,38.

Os propongo una actividad para que utilicéis la paradoja en clase. Su objetivo principal es poner de manifiesto la insuficiencia de la intuición numérica y la imprescindible necesidad de razonar cuidadosamente. Con la ayuda de mi hermano Miguel creamos una lista con la fecha de nacimiento de 50 aragoneses ilustres. Los alumnos elegirán 29 nombres de la lista y apuntarán en un calendario el día en que nacieron dichos personajes, junto con el día de su cumpleaños. Previamente a la selección de cada alumno, preguntaremos en cuántas de ellas piensan que ocurrirá alguna repetición. Teniendo en cuenta que la probabilidad de este suceso es ligeramente superior a 0,7, siendo muy conservadores podemos hacer la, a priori sorprendente hipótesis, de

que en más de la mitad de las selecciones habrá algún día en que hayan nacido dos personas (enlace a la ficha de la actividad).

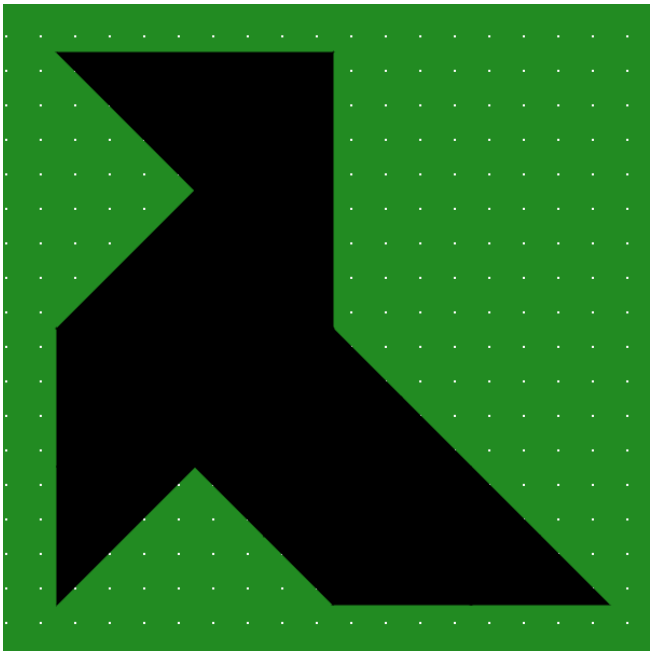
Concursos en la web de Conexión Matemática

Este curso vamos a celebrar a través de la página web del programa Conexión Matemática nuestros tradicionales concursos. El primero es el *III Concurso de figuras imposibles*. Está dirigido a los alumnos de Educación Secundaria, Formación Profesional Básica y Bachillerato de los centros educativos de Aragón y también a los alumnos de cualquier nivel educativo de los Centros de Educación de Personas Adultas de Aragón. Los participantes tienen que construir en papel, cartulina u otro material una de las figuras imposibles que se les proponen en la web, dejando también abierta la opción de un diseño libre. La novedad es que abrimos el concurso a todos los alumnos de los centros de adultos.

También se va a desarrollar la cuarta edición del *Torneo de tangram* dirigido a los alumnos de Primaria, de 1.º y 2.º curso de Educación Secundaria y de Formación Profesional Básica de los centros educativos de Aragón, así como a los alumnos de cualquier nivel educativo de los Centros de Educación de Personas Adultas de Aragón. En la modalidad de torneo los participantes se enfrentan al reto de resolver 50 figuras, organizadas en 4 niveles de creciente dificultad. En la nueva modalidad diseño, hay que crear una figura utilizando dos juegos de piezas (14 polígonos), el doble tangram. También el concurso queda abierto a los centros de adultos.

La novedad más destacada es que los 10 mejores alumnos de 5.º y 6.º de Primaria, un representante por centro, disputarán una fase final coincidiendo con la fase final de la Olimpiada Matemática de Aragón.

Para más información e inscripciones visitar el enlace: <http://conexionmatematica.catedu.es/concursos>.



Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Web: <http://sapm.es>

Enero de 2019

ISSN: 2386-8821e

CC BY NC SA