Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 28
Mayo de 2019

De un tiempo a esta parte el mes de mayo resulta bastante intenso para la SAPM. A la tradicional final de la Olimpiada Matemática de 2.º de ESO (ya van 28 ediciones), últimamente se han unido entregas de premios y actividades diversas. Además, en esta ocasión se ha concentrado todo en torno al 12 de mayo, Día Escolar de las Matemáticas de la FESPM.

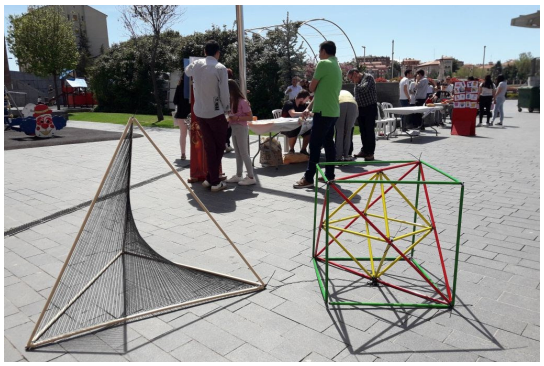
Los premiados de la Olimpiada

El viernes 10, en las instalaciones de la Corporación Aragonesa de Radio y Televisión se entregaron los premios de los concursos asociados al programa Conexión Matemática: Concurso de radionovelas matemáticas, Concurso de Tangram a distancia y Concurso de figuras imposibles.

Al día siguiente se nos acumularon las actividades. En la Facultad de Ciencias se celebró la final de la Olimpiada de 2º de ESO, pero, en esta ocasión, también tuvimos la final presencial del Concurso de Tangram para alumnado de Primaria. Los ocho premiados en esta edición de la olimpiada fueron: Javier Badesa Pérez, Lorién Blasco Atarés, Rubén Díaz Balfagón, Jorge Ibarzo Gracia, Claudia Lahuerta Benito, Zhangde Lin Zou, Ana Sofía Pérez Martínez y Rafael Salazar Delcazo. Mientras que los tres seleccionados que representarán a Aragón en la XXX Olimpiada Matemática Nacional de 2.º ESO son: Javier Badesa Pérez, Jorge Ibarzo Gracia y Zhangde Lin Zou.

Pero ese mismo día, los compañeros de Teruel organizaron el segundo día de Matemáticas en la calle, con un buen número de profesores turolenses implicados, y, lo que es mejor, los estudiantes del grado de Magisterio Primaria.

DANIEL SIERRA RUIZ (*Presidente de la SAPM*)



Matemáticas en la calle en Teruel

Los premiados de CM

Sumario Interactivo

El día que Lewis Carroll (¡y otros!) visitó el MMACA
Propuesta de evaluación inicial para 1.º de ESO
Tres problemas de las oposiciones de 2018 con Geogebra
Análisis del tercer problema de la Olimpiada: Las partidas de dardos
Reflexiones matemáticas en una semana especial
Fractales platónicos

únete a la SAPM

click

Faltan menos de 50 días para…

Permanezcan atentos

Pista

PALEXCO
A Coruña

3 a 6 julio 2019

JAEM 19

UN ATLÁNTICO QUE SUMA

CONVOCA: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ORGANIZA: AGAPEMA

COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

El día que Lewis Carroll (¡y otros!) visitó el MMACA

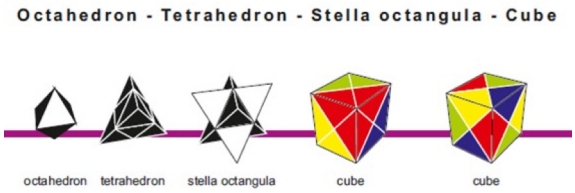
por
GUIDO RAMELLINI
(Museu de Matemàtiques de Catalunya)

—Mr. Charles Dodgson, I presume.

—No, estoy aquí como Lewis Carroll, acompañando a Alicia en esta experiencia que espero pueda ser maravillosa. [1]

—¿Me permite que le muestre un módulo que le puede interesar?

—Con mucho gusto.



—Es este.

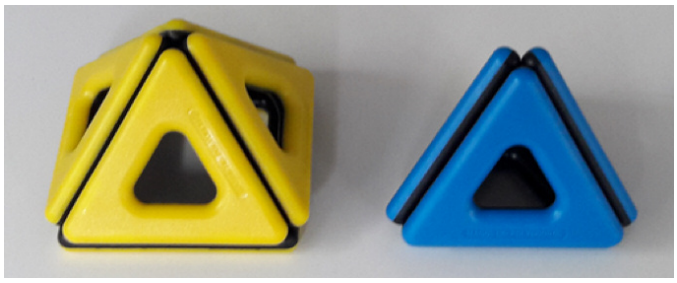
Como puede ver, solo pedimos a los usuarios que monten las figuras que aparecen en esta secuencia.

Habrá notado que he utilizado la palabra *usuario* porque no nos gusta llamarlos *visitantes*; no queremos a gente de paso, sino a amigos que se apropien del sitio y la experiencia.

Volviendo al módulo, delante de este, a veces llevamos a los usuarios más interesados a reflexionar sobre las características de las piezas, improvisando un breve taller.

—Me parece muy interesante, pero ¿qué tiene que ver esto conmigo?

—¿Se acuerda usted de su Pillow Problem, #49 (Carroll, 2015: 42)?



Si hacemos que cuatro triángulos equiláteros sean las caras de una pirámide de base cuadrada, hallad la relación que guarda su volumen con el del tetraedro formado por los mismos cuatro triángulos.

Antes de pasar al cálculo, proponemos a nuestros usuarios que se atrevan a conjeturar y usen su intuición para avanzar posibles soluciones.

Si tenemos el material a disposición, les dejamos que construyan sus modelos.

$$\frac{V_{pir}}{V_{tetra}} = \sqrt{2};\quad 1{,}5;\quad \sqrt{2};\quad \frac{\pi}{2};\quad 2;\quad \sqrt{6}.$$

Parece bastante evidente que:

— El tetraedro es más alto que la pirámide cuadrangular, pero esta tiene más superficie de base.

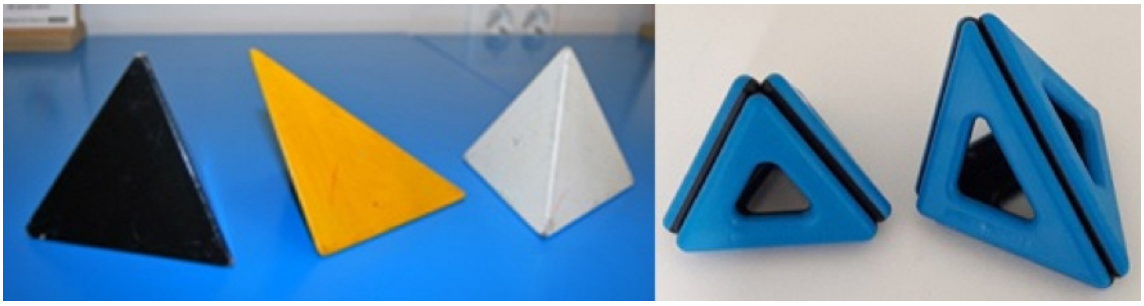
— Finalmente, la pirámide cuadrangular tiene más volumen.

A veces les ofrecemos unas alternativas para ayudarlos.

En este caso, podríamos dejarlos escoger entre estos valores:

Lógicamente, con un poco de paciencia y unos instrumentos básicos de matemáticas (poco más que el teorema de Pitágoras), se puede llegar fácilmente al resultado, que seguirá pareciéndonos sorprendente.

Pero usted nos propone resolverlo con la cabeza recostada sobre una almohada, o sea, sin construir, dibujar, escribir, calcular, desarrollar, simplificar, etc.



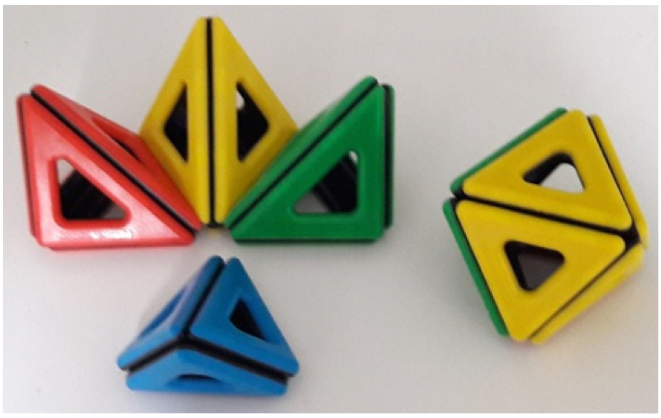
Así que me pregunté: ¿No habrá otro camino?

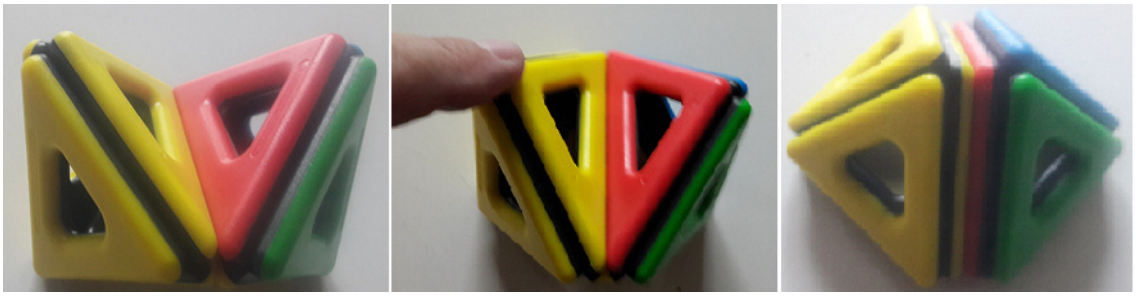
Dejé mi almohada y, para visualizar el problema, me puse a construir los sólidos con el Polydron© Magnètico[2]. Es un material que usamos en nuestras exposiciones y talleres.

Enseguida me vino la idea de considerar la pirámide como medio octaedro.

El paso siguiente fue recordar este material que tenemos delante, en el que hay un octaedro y tetraedros regulares e irregulares, que tienen el mismo volumen, ya que tienen la misma base (uno de los triángulos) e igual altura.

Con cuatro de los tetraedros irregulares es muy fácil construir un octaedro





Y ya lo tenemos:

Si $V_{oct} = 4 \cdot V_{tetra} \quad \Rightarrow \quad V_{pir} = 2 \cdot V_{tetra}$

Pregunté a Carroll:

—¿Hay algo de esto en su *visión desde la almohada*?

—Si te contestara habría escogido Bertrand Russell y no Lewis Carroll como pseudónimo, ¿no te parece?

Mientras tanto, Alicia seguía jugando con el material.

Detrás de ella, una mano muy elegante colocó un dedo sobre un vértice de la figura que Alicia estaba formando con dos tetraedros irregulares. Un poco de presión y la pirámide se formó.

—Pero entonces no es necesario pasar por el octaedro…

—¡Elemental, querido Watson!

—No es necesario, pero es conveniente —intervino Pascal.

1 No hace mucho que, leyendo en Spokes un artículo muy interesante (Viladot, Stengles y Fernández, 2015), sobre la tendencia de los Museos de Ciencia y de la divulgación en general de ofrecer actividades *divertidas*, reflexionaba sobre el riesgo de que Wonderland (el País de las Maravillas de Alicia) se transformara en el Paese dei Balocchi (el País de los Juegos de Pinocho).

2 Hemos construido un kit MMACA del Polydron©, que vendemos en nuestra tienda con una guía de actividades que se pueden hacer (Pág. 26 de nuestro catálogo: <https://mmaca.cat/botiga/>).

3 Para los que son tan perezosos que ni consultan la Wikipedia:

TETRAEDRO:

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l \qquad h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}l \qquad A = \frac{1}{2}l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \qquad V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}l = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}l^3}$$

PIRÁMIDE:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}l \qquad h = \frac{\sqrt{2}}{2}l \qquad A = l^2 \qquad V = \frac{1}{3}\cdot l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}l^3}$$

Propuesta de evaluación inicial para 1.º de ESO

por
M.ª Aránzazu López Lacasta
(IES Pilar Lorengar, Zaragoza)

Tras un año trabajando por proyectos y sin libro de texto, el hecho de tener que *buscarte la vida* da pie a plantearte algunas cosas. Una de ellas fue sobre la evaluación inicial. Para comenzar el curso y pensando en la evaluación inicial que se suele realizar pasadas las tres primeras semanas de curso, solemos, en los departamentos, pasar una prueba de conocimientos de 6.º de primaria. Año tras año, cambiando de centro y ciudad o pueblo, suele salir mal en los mismos aspectos, salvo raras excepciones. ¿Y por qué una prueba escrita la primera semana, sino el primer día de clase?

Con las oposiciones por delante, me planteé hacer algo diferente, que esta pudiera ser más dinámica y que diera una información más real y un conocimiento mayor de los alumnos, y que esta información no fuera solo académica. Algo posiblemente ambicioso, pero no perdía nada y podía ganar bastante.

Como he comentado, el año pasado trabajé sin libro y por proyectos. Ese curso, en el departamento planteamos seguir las pautas de los libros de la editorial Proyecto Sur. Su primer capítulo me dio la idea y el nombre a lo que planteé como Unidad 1 en mi programación y que tenía por objetivo completar la evaluación inicial del alumno y del grupo-clase.

Mi unidad se llamaba *Calentando para evitar lesiones*, una unidad secuenciada en cinco sesiones, donde se desarrollan diez actividades contextualizadas para trabajar con diferentes agrupaciones y trabajar con diferentes contenidos matemáticos.

Este curso, en el IES Pilar Lorengar hemos llevado a cabo una versión de lo planteado. Junto con mis compañeros de departamento, Aurora Domenech y Sergio Martínez, hemos planteado el desarrollo de cuatro sesiones donde trabajar seis de estas diez actividades.

Primera sesión

Fue la primera clase del grupo en la materia, por tanto tras la presentación del profesor y de la materia, se les propuso hacer la primera actividad. Para ello se agrupó a los alumnos por parejas y se les dio 10 minutos para resolverla. Se les proporcionó un folio donde debían plantear los pasos para llegar a dar respuesta a las siguientes preguntas:

Actividad 1: *Para comenzar con buen pie*

¿Cuantos días tiene una niña de 1º de ESO? Y el profesor, ¿cuántos días tiene? ¿Y una jubilada?

¿Cuántas páginas reuniríamos juntando todos los libros que hay en clase ahora mismo?

Una mosca tiene una vida media de 14 días, pero ellas, para darse importancia, cuentan su vida por segundos. ¿Qué vida media tienen las moscas en segundos?

Transcurrido el tiempo, se pasaba a trabajar en gran grupo, anotando las soluciones planteadas por las parejas.

Segunda sesión

En esta sesión de trabajo, se organizó la clase en pequeños grupos de 3-4 alumnos, organizados por orden alfabético. Se pretendía trabajar con operaciones combinadas, hacerles ver la importancia del orden de las mismas, así como ver que no siempre hay un camino único para resolver un problema. Para ello, planteamos una segunda actividad, muy dirigida, denominada *el código de barras*, y otra actividad menos dirigida y con diversos caminos para llegar a la misma solución, denominada *los 4 cuatros*:

Actividad 2. *El código de barras*

CÓDIGOS DE BARRAS

Estamos seguros que este recuadro con barras negras de diferente grosor y separadas de distinta forma lo has visto en multitud de productos. Efectivamente, se e llama ***código de barras***. Esta distribución de líneas permite que l código de un producto pueda ser leído por un lápiz óptico o ***scanner***. Nosotros podemos leerlo directamente pues dicho código es la ecuencia de números que se observa unto a las barras.

Pero, ¿sabes qué información nos facilita el código de barras? Depende del modelo de código que tenga el producto, la mayoría son como el del dibujo. Observa que tiene 13 ***dígitos***.

9 788482 541228

Código del país	Código empresa	Código producto	Código control

El número del código de control es una cifra que podemos calcular nosotros:

- Ponemos las cifras del código y, debajo, la secuencia 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3:

9	7	8	8	4	8	2	5	4	1	2	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3

- Multiplicamos las cifras de cada columna y las sumamos:

$9\times1 + 7\times3 + 8\times1 + 8\times3 + 4\times1 + 8\times3 + 2\times1 + 5\times3 + 4\times1 + 1\times3 + 2\times1 + 2\times3 = 122.$

- El número de seguridad se obtiene al restar 130 - 122 = 8.

Código de barras: Conjunto de signos, formado por una serie de líneas y números asociados a ellas, que se pone sobre los productos de consumo y que se utiliza tanto para la gestión informática de las existencias, como para evitar errores en las cajas.

Número dígito: Cualquiera de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Scanner: Aparato que efectúa la exploración de un objeto mediante rayos luminosos por transparencia o reflexión.

1. Tomamos 4 códigos de barras de los materiales escolares que tengamos en el equipo, comprobemos que el número de seguridad es el correcto.
2. Dado el código de barras de la figura adjunta
   - ¿Es correcto? Justificad vuestra respuesta
   - ¿Cuál es el código de la empresa?
3. Si sabemos que:
   - El código del producto es 52 364
   - El código del país es 84
   - El código de empresa es 14 870

   ¿Cuál es el código de verificación?

Después de 20 minutos de trabajo, con el profesor pasando por los diferentes equipos, se continuaba con una pequeña puesta en común, con las anotaciones que el profesor había hecho, no dando tanta importancia a la solución sino a los procesos observados en los diferentes grupos. Esta última parte de la actividad suponía un máximo de 5 minutos.

Tras ello, planteábamos la tercera y última actividad de la sesión.

Actividad 3. *Los 4 cuatros*

¿Te imaginas qué puedes hacer con cuatro cuatros?
Efectivamente, puedes sumarlos: 4 + 4 + 4 + 4 = 16;
Multiplicarlos: 4 × 4 × 4 × 4 = 256;
Sumarlos y restarlos: 4 + 4 – 4 – 4 = 0;
O, simplemente, escribirlos de distintas maneras: 4444, 44/44, ...
¿Sabías que...? Combinando de forma adecuada sólo los cuatro cuatros y las distintas operaciones matemáticas puedes obtener no sólo del 0 al 10, sino hasta el 100 ó más.
Escribe los 10 primeros números utilizando cuatro cuatros y las operaciones adecuadas.

1. Escribid los 10 primeros números utilizando cuatro cuatros y las operaciones adecuadas (No hay una única manera de obtenerlos)

Para hacerlo se les dio 20 minutos durante los que pudimos ver cómo se organizaban y cómo llegaban a posibles soluciones. No llegaron más allá del 6 en la mayoría de los equipos ya que el hecho de organizarse supone tiempo que no se dedica al trabajo de la actividad. Transcurrido este tiempo, trabajamos en la pizarra con las soluciones obtenidas.

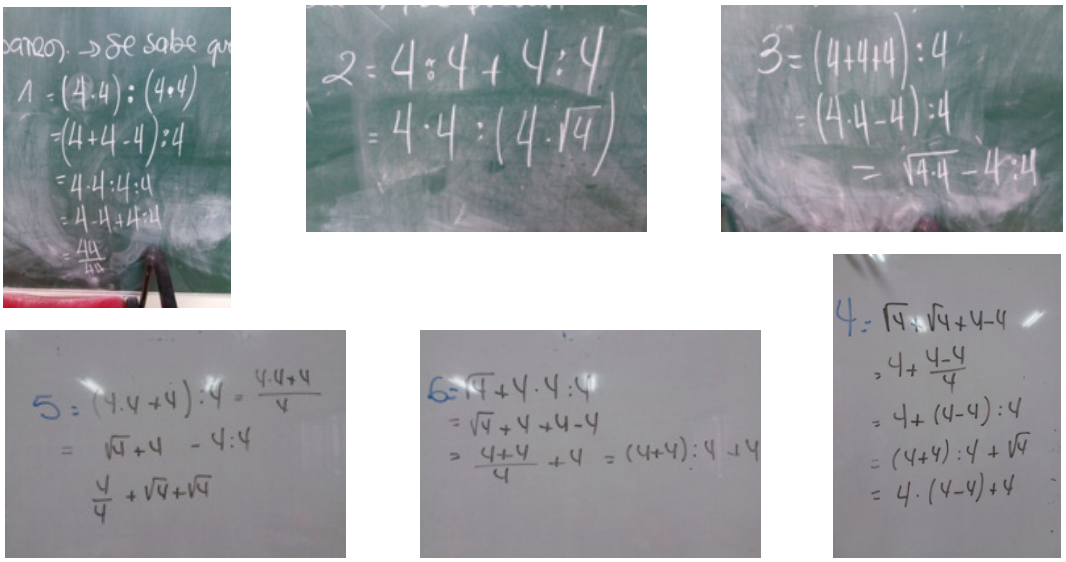


Figura 1. Algunas soluciones del aula

Finalmente, teníamos un *Extra*, una actividad para casa, intentando ver con ello la evolución de cada alumno de forma individual, a partir de la curiosidad creada con la actividad de clase.

> EXTRA: Consigue, de tres formas diferentes, el 8, haciendo uso, única y exclusivamente, de cuatro cuatros, y de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada.

Tercera sesión

Lo primero que se hizo en la 3.ª sesión fue corregir la actividad extra, que tuvo muy buena acogida.

En esta sesión hicimos trabajar a los chicos por equipos pero en este caso organizados en orden alfabético alterno, y nos centramos en otras dos actividades donde se trabaja de diferente manera aspectos como las magnitudes, la geometría, los números y la divisibilidad.

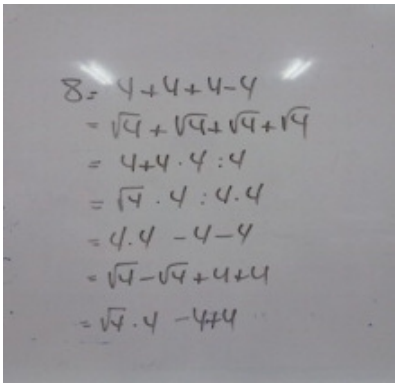


Figura 2. Soluciones del aula de la actividad extra

Actividad 4. *Billetes*

Los billetes actuales de 100 euros miden alrededor de 147 mm de largo por 82 mm de ancho, y los de 50 euros alrededor de 140 mm de largo por 77 mm de ancho. Si pusiéramos un millón de euros, en billetes de 100, uno a continuación de otro, ¿cuál sería su longitud? ¿Y si los billetes fueran de 50 euros?

A ver quién acierta:

1. Poniendo los billetes de 5, 10 y 20 euros, a lo ancho, en filas, ¿cuál sería la más larga?
2. Y si ponemos los billetes de 100, 200 y 500 euros en columnas, ¿cuál es la más baja?

En la tabla siguiente os damos las dimensiones de los billetes. Vamos a comprobar si las primeras impresiones que habéis tenido son las correctas. Hagamos las cuentas.

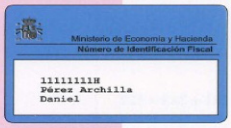
Billetes (euros)	5	10	20	50	100	200	500
dimensiones (mm×mm)	120×62	127×67	133×72	140×77	147×82	153×82	160×82

Tras quince minutos de trabajo en equipo se hizo una pequeña puesta en común sobre los cambios de opinión que se produjeron tras darse cuenta de que la información que se debía tener en cuenta no solo eran las dimensiones de los billetes. Esto nos llevó algo más del tiempo planteado.

Con ello pasábamos a la segunda actividad de la sesión, la quinta actividad. Se trata de una actividad algo más relajada, donde poder trabajar la divisibilidad con el número de identificación fiscal y donde ver cómo se manejan los alumnos con las divisiones. En ella también proponíamos una pequeña parte para casa.

Actividad 5. *NIF*

EL NÚMERO DE IDENTIFICACIÓN FISCAL



Hace años, el Ministerio de Economía y Hacienda estableció un Número de Identificación Fiscal (NIF), relacionado con nuestro carnet de identidad. Este número está formado por nuestro DNI añadiéndole una letra mayúscula al final.

Para calcular la letra, se divide el DNI entre 23 y observamos el resto de la división. A cada posible resto le corresponde una letra, según la siguiente tabla.

Resto	Letra	Resto	Letra	Resto	Letra
0	T	8	P	16	Q
1	R	9	D	17	V
2	W	10	X	18	H
3	A	11	B	19	L
4	G	12	N	20	C
5	M	13	J	21	K
6	Y	14	Z	22	E
7	F	15	S		

Por ejemplo, si el DNI es el 11 111 111:

- Dividimos 11 111 111 entre 23. Resto = 18.
- Buscamos en la tabla: corresponde a la letra H.

Por tanto, el NIF es 11 111 111 H.

1. Si el DNI de Pedro es 14 856 709 ¿Qué letra le corresponde de NIF?
2. Si mi NIF es 00178245A ¿es verdadero o falso? En caso de ser falso, ¿cuál sería el correcto?
3. Pregunta por cuatro DNIs de casa y comprueba si la letra está bien.

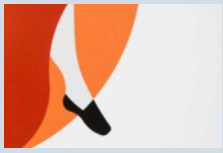
Cuarta sesión

En la última sesión planteada los grupos los formaron los propios alumnos por amistades. Con la última actividad queríamos trabajar los números grandes desde algo concreto y que les pudiera llamar la atención. Nos fijamos en el presupuesto de las fiestas del Pilar del año anterior. Además aportábamos muchos más datos de los necesarios.

Actividad 6. *El peso del presupuesto*

Diariamente aparecen, y cada vez con más frecuencia, cantidades grandes que nosotros asimilamos más o menos bien.
¿Nos hemos detenido a pensar el significado de esas cantidades?
Veamos un ejemplo:

En el lenguaje popular solíamos decir, refiriéndonos a un millón de pesetas como *un kilo*, pues, al parecer, un millón de pesetas, en billetes antiguos de 1 000 pts, pesaba 1 kg.



En las fiestas del Pilar del año pasado, el Ayuntamiento de Zaragoza se gastó 1 780 023 euros, dinero que provenía de:

- las arcas municipales (448 271 euros),
- los patrocinios y colaboraciones (610 768 euros),
- los ingresos por las taquillas y cánones diversos (720 983,63 euros).

¿Y en qué se lo gastó?:

- El escenario de la plaza del Pilar con sus conciertos gratuitos supone el principal gasto del presupuesto pilarista (307 505 euros).
- Espacio infantil Río y Juego del frente fluvial de la Expo (280 790 euros).
- Las actuaciones musicales que se reparten por las plazas del Justicia, Las Armas, San Bruno, Jardín de Tosos y San Pedro Nolasco (267 218 euros).
- La organización de los actos tradicionales (182 300 euros).
- El trabajo de comunicación de las fiestas (174 943 euros).
- El teatro de calle (165 217 euros).
- El parque de Marionetas en el parque Grande (150 950 euros).

Decidnos, cuanto pesaría, en pesetas:

a. la cantidad que proviene de los patrocinios y colaboraciones,
b. la cantidad que se va a gastar en el escenario de la Plaza del Pilar.

Para esta actividad les dábamos a los alumnos 15 minutos, durante los que el profesor pasaba por los equipos para observar cómo se organizaban, si sabían localizar los datos solicitados, hacer el cambio de unidades monetarias…

Tras este periodo de tiempo, se hizo una pequeña puesta en común donde un representante de cada equipo indicaba, no tanto el resultado, sino los pasos dados para llegar a él.

Conclusiones

Como conclusión a estas cuatro sesiones me gustaría destacar varios aspectos:

— Primero, el hecho de trabajar con diferentes agrupaciones a lo largo de la semana hizo que como docente tuviera opción de conocerlos mejor, ya que con cada actividad tenía posibilidad de acercarme a los diferentes equipos y verlos en activo. Además, estas situaciones promueven la comunicación entre los alumnos y permiten hacerte una pequeña idea de quién puede tener dificultades y quién puede destacar de alguna manera.
— Por otro lado, plantear actividades contextualizadas así como el comenzar el curso *de forma diferente*, hace que en el alumnado se genere cierta curiosidad por *lo nuevo*, algo que se fue manteniendo con la mayoría de actividades.
— Finalmente, permitió obtener una mayor información sobre el grupo-clase y sobre alumnos concretos, de cara a establecer una posible estructura de la materia, del aula y del grupo. Me dio más información, sin duda, que una simple prueba escrita.

Tres problemas de las oposiciones de 2018 con Geogebra

por

Claudio Martínez Gil

(IES Benjamín, Tudela)

Ya en 2001 Tomás Recio y sus colegas del Grupo de Trabajo SEIEM-Apregeom nos hablaban de las demostraciones automáticas (ponencia en las X JAEM). Con el paso del tiempo algunos ya reconocemos expresiones como *demostraciones mecánicas*, *demostraciones sin palabras* o *demostraciones con ayuda del ordenador*. No parece de recibo olvidar el ordenador en cualquier campo de las matemáticas, ya sea en la docencia o investigación. Se presentan en esta comunicación algunos de los problemas aparecidos en las pasadas oposiciones 2018, pero resueltos con Geogebra. El libro Geogebra donde se recogen está en: <https://ggbm.at/FvQyGSNT>. Se pueden utilizar sin ninguna restricción.

Problema aparecido en la EVAU en Navarra

Se trata del siguiente enunciado:

Demuestra que existen $\alpha, \beta \in (-1, 1)$ con $\alpha \neq \beta$ y $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, siendo:

$$f(x) = (x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}} \cdot \sqrt[3]{(x-1)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$$

Tal como está construida la función, parece que se quiere aprovechar que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Observamos y es claro que: $f \in C[0, 1]$, $f \in D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Por el teorema de Rolle $\exists\, \beta \in (0, 1)$ t.q. $f'(\beta) = 0$.

Pero en el intervalo $(-1, 0)$ no podemos razonar de la misma forma ya que la función $f(x)$ no es derivable en $x = -2/3$. El problema no es inmediato.

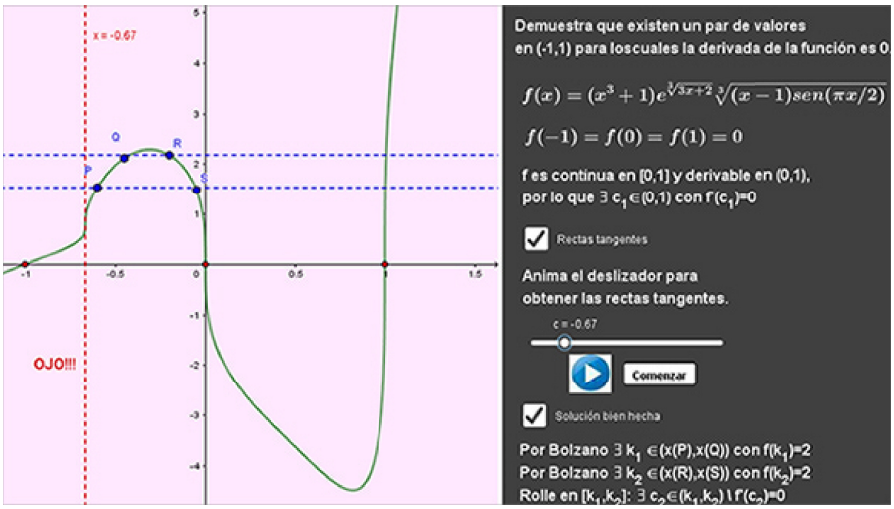


Figura 1. Función no derivable en $x = -2/3$

Habría que buscar un par de valores $k_1, k_2 \in (-2/3, 0)$ de modo que $f(k_1) = f(k_2)$. Como en el intervalo $[k_1, k_2]$ la función verifica las hipótesis de Rolle, tendremos que existe $\alpha \in (k_1, k_2)$ con $f'(\alpha) = 0$. Elegir k_1, k_2 de forma exacta parece complicado. Pero como la función es continua, por el teorema de los valores intermedios, podemos asegurar la existencia de ese par de valores. En la figura 1 vemos que $k_1 \in (x(P), x(Q))$, $k_2 \in (x(R), x(S))$ y además que $f(k_1) = f(k_2) = 2$. Así el problema quedaría bien resuelto.

Creer que el alumnado, sin calculadora, va a razonar correctamente la existencia de los valores k_1, k_2 es una quimera. Pero lo que no parece de recibo es aceptar que se diga que la función es derivable en $(-1, 0)$, simplemente porque no lo es.

Problema del astroide

Un problema que se repite en todas las CCAA es el de hallar un lugar geométrico. Para ello, Geogebra funciona muy bien, ya que tiene un comando específico, el comando LugarGeométrico.

Como ejemplo, el primer problema planteado en Navarra:

> Halla el astroide como envolvente de segmentos de longitud fija *L*, que se deslizan en los ejes coordenados.

Lo hacemos con Geogebra activando el rastro en los segmentos (figura 2). También lo podemos hacer *a mano*:

Consideramos un punto P sobre el eje X y otro Q sobre el eje Y, unidos por un segmento de longitud L. Entonces tenemos:

$$P = (L\cos\alpha, 0) \quad Q = (0, L\operatorname{sen}\alpha) \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

La recta que une P y Q tiene por ecuación: $\dfrac{x - L\cos\alpha}{-L\cos\alpha} = \dfrac{y}{L\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow -x\tan\alpha + L\operatorname{sen}\alpha = y$

Luego la ecuación implícita del astroide será: $F(x, y, \alpha) = y + x\tan\alpha - L\operatorname{sen}\alpha = 0 \quad [1]$

Que derivaremos respecto de α: $F_\alpha(x, y, \alpha) = x(1 + \tan^2\alpha) - L\cos\alpha = 0 \quad [2]$

De [2] se sigue que: $x = L\cos\alpha\cos^2\alpha = L\cos^3\alpha$

Ahora, de [1]: $y = L\operatorname{sen}\alpha - L\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha = L\operatorname{sen}^3\alpha$

Con lo que ya tenemos las ecuaciones del astroide.

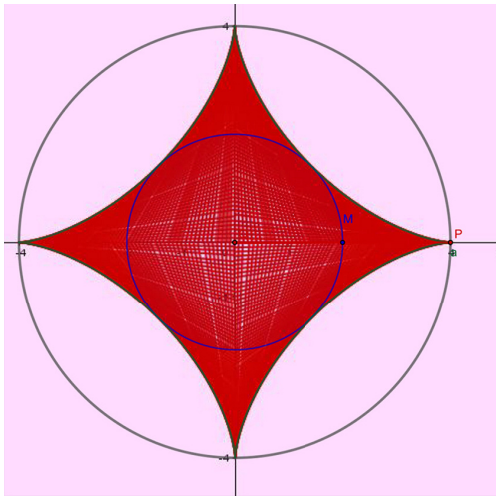


Figura 2. Astroide como envolvente

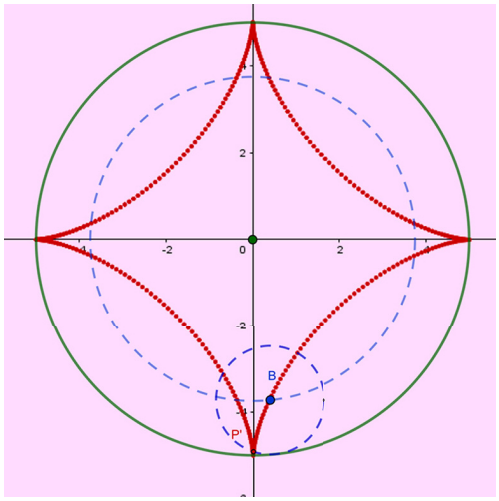


Figura 3. Astroide como lugar geométrico

Lo curioso es que aparece el mismo astroide en un problema de las oposiciones en la CCAA de Aragón, pero esta vez considerándolo como lugar geométrico de un punto fijo *P'* de una circunferencia de radio $R/4$, tangente interior a otra dada de radio R, cuando la interior rueda sin deslizar (la figura 3 muestra el lugar geométrico hallado con Geogebra, activando el Rastro del punto *P'*).

Problema del cociente de superficies de triángulos

Mostramos otro problema aparecido en Aragón:

> Se dan dos circunferencias, de centros *O* y *O'* y radios *R* y *r*, respectivamente, tangentes exteriores en el punto *A*. Por un punto *B* de la tangente común, se trazan dos tangentes *BC* y *BC'*, siendo *C* y *C'* los puntos de contacto con cada una de las circunferencias. Calcula el límite del cociente de las áreas de los triángulos *ABC* y *ABC'* cuando:
> 1. El punto *B* se aleje indefinidamente del punto *A*.
> 2. El punto *B* tiende hacia el punto *A*.

Este problema resulta ideal para mostrar la idea de límite, en el sentido de *acercarse indefinidamente* o de *alejarse indefinidamente*. Para ello el *zoom* de Geogebra resulta ideal. En el primer caso habremos de utilizar el comando ZoomAcerca y en el segundo el ZoomAleja.

Pero este problema también vamos a hacerlo *a mano*:

$$S_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{2} \qquad S_{ABC'} = \frac{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC'}|\,\mathrm{sen}\,2\beta}{2}$$

Ahora basta dividir y dejar la expresión en términos de tangentes para poder expresar estas tangentes en función de los radios:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}} = \frac{|\overrightarrow{BC}|\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{|\overrightarrow{BC'}|\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta} = \frac{|\overrightarrow{BC}|\tan\alpha\,(1+\tan^2\beta)}{|\overrightarrow{BC'}|\tan\beta\,(1+\tan^2\alpha)} = \frac{|\overrightarrow{BC}|\dfrac{R}{|\overrightarrow{BC}|}\left(1+\dfrac{r^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)}{|\overrightarrow{BC'}|\dfrac{r}{|\overrightarrow{BC'}|}\left(1+\dfrac{R^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)} = \frac{R\left(1+\dfrac{r^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)}{r\left(1+\dfrac{R^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)}$$

Ahora ya solamente nos falta pasar al límite para responder a las dos cuestiones planteadas:

1. Cuando B se *aleja indefinidamente* de *A*:

$$\lim_{B\to\infty}\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}} = \lim_{B\to\infty}\frac{R\left(1+\dfrac{r^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)}{r\left(1+\dfrac{R^2}{|\overrightarrow{BA}|^2}\right)} = \boxed{\frac{R}{r}}$$

2. Cuando B se *acerca indefinidamente* a *A*:

$$\lim_{B\to A}\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}} = \lim_{B\to A}\frac{R\left(r^2+|\overrightarrow{BA}|^2\right)}{r\left(R^2+|\overrightarrow{BA}|^2\right)} = \frac{R\,r^2}{r\,R^2} = \boxed{\frac{r}{R}}$$

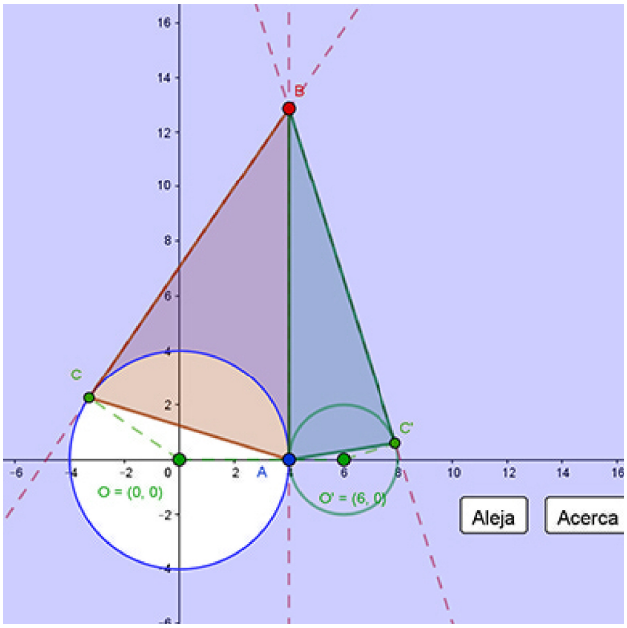


Figura 4. Rectas tangentes

Análisis del tercer problema de la Olimpiada: *Las partidas de dardos*

por
Pablo Beltrán-Pellicer
(IES Valdespartera y Universidad de Zaragoza)

Dedicamos este artículo a analizar las respuestas de los participantes de la fase semifinal de la XXVIII Olimpiada Matemática de 2.º ESO en Aragón al tercer problema. Se trata del siguiente enunciado:

28 Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO

Tres amigos se reúnen para jugar unas partidas de dardos. Acuerdan jugar dos cada vez y el que pierde descansa, entrando el otro en su lugar. Al final de la tarde Ana jugó 10 partidas, José 15 y Marta 17. ¿Quién perdió la segunda partida?

Cuando lo saqué a relucir en el aula, a la semana siguiente de la olimpiada, fui leyendo el problema a la vez que me fijaba en las caras de mis alumnos. Y es algo que hice tanto en mi grupo de 1.º de ESO como en el grupo de 2.º de Bachillerato. Pues bien, lo más usual era ver caras de extrañeza al plantear la pregunta final. Por inesperada, tal vez. Nos referiremos a esta anécdota más adelante. Por el momento comentemos la solución.

Es importante calcular, en primer lugar, cuántas partidas se han jugado. Es una información que no se proporciona de manera directa en el enunciado y que resulta vital para dar respuesta al problema. Como están jugando a entradas y salidas, en cada partida juegan dos y uno gana, no existiendo el empate. Por lo tanto, se juegan:

$$\frac{10+15+17}{2}=\frac{42}{2}=21 \text{ partidas.}$$

La que menos partidas juega es Ana, 10 partidas, por lo que como mínimo todos juegan ese número de partidas. Si Ana hubiese jugado la primera partida, quedando 20, jugaría por lo menos la mitad (10 de esas 20), lo cual es imposible porque entonces, sumando la primera, serían 11. Por lo tanto, Ana ha empezado jugando la segunda partida, y perdiendo esa y todas las pares, pues es la única manera de jugar solo 10 partidas. Por lo tanto, la solución es que Ana es la que pierde la segunda partida.

Resoluciones correctas

Si bien en todos los problemas de las olimpiadas se exige razonar la solución, puesto que de lo que se trata es de argumentar el razonamiento, en este que nos ocupa es esencial, porque solo hay tres opciones. O pierde la segunda partida Ana, o la pierde Marta, o la pierde José. En el argumento era necesario reflejar lo que hemos mencionado antes: que Ana pierde todas las partidas y que empieza en la segunda, porque al ser 21 partidas, ha de jugar una de cada dos, siendo la única forma de jugar sus 10 partidas.

De los 897 participantes, 36 (que representan un 3,57 %) fueron capaces de dar con la respuesta correcta y razonarla. En la figura 1 se observan dos ejemplos en los que se aprecian los elementos mencionados. Por otra parte, en la figura 2, vemos una resolución, también correcta, pero que además incluye una lista de las partidas para apoyar su argumento. Aunque no es necesaria dicha lista, se trata de una técnica de resolución de problemas y es interesante señalar alguna característica de esta que resulta indicativa de una adecuada actitud matemática, como la elección de una notación adecuada. Utiliza la letra «J» para denotar a José, «M» para Marta y «A» para Ana, siendo «JM» una partida en la que juegan José contra Marta. En aquellas partidas donde se desconoce uno de los contrincantes, emplea la letra «x». De esta manera, «Ax» es una partida en la que juega Ana contra José o contra Marta. Seis de los 36 participantes que dieron la respuesta correcta hicieron uso de una lista de este tipo, bien como herramienta o técnica para ganar comprensión, bien como apoyo para el argumento.

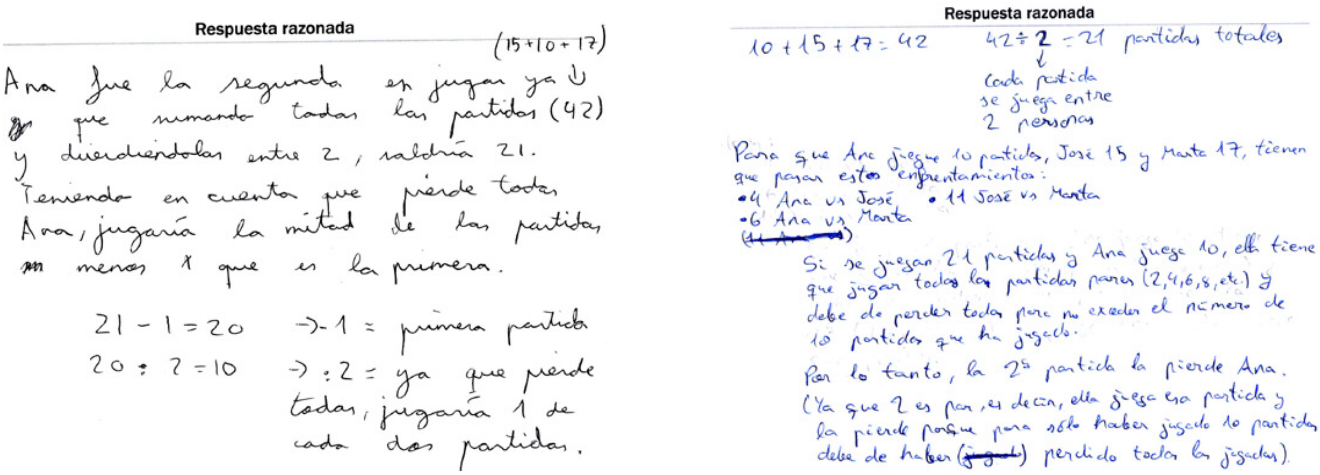


Figura 1. Ejemplos de resoluciones correctas y argumentadas

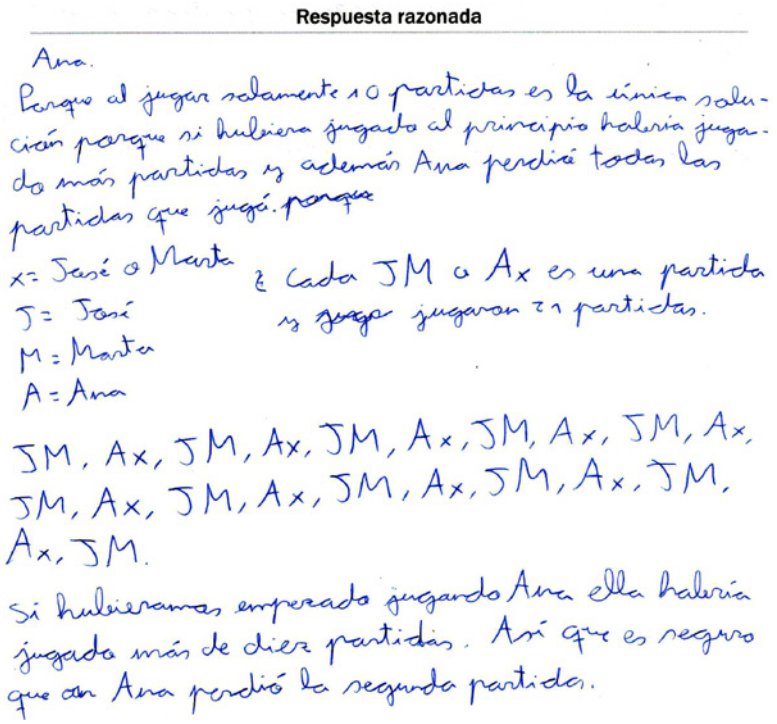
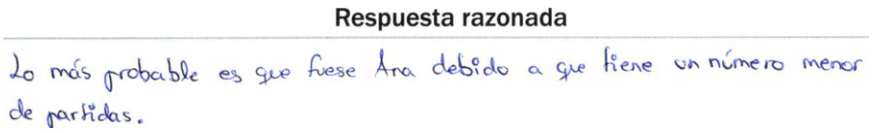


Figura 2. Ejemplo de resolución correcta que se apoya en una lista para ilustrar su argumentación

Resoluciones incorrectas o incompletamente argumentadas

Ha habido un elevado porcentaje (37,68 %) de resoluciones en blanco o sin argumentos de ningún tipo. En este último caso se engloban las de aquellos participantes que simplemente dicen que «la solución es Ana», «la solución es Marta» o «la solución es José» y la de aquellos que ofrecen un argumento, como «Ana es la que pierde la segunda partida porque José y Marta juegan la primera». Incluso, hay quien aventura un osado «nadie perdió la segunda partida, quedan los tres empatados».

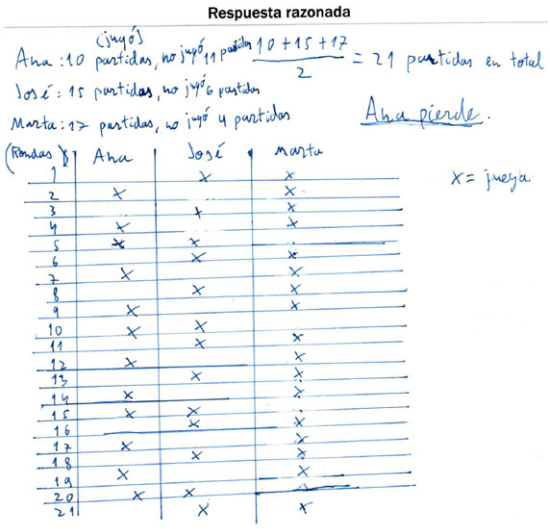
Es destacable el hecho de que 57 participantes (6,35 % del total) indican que el problema no tiene solución, seguramente pensando, igual de sorprendidos que los protagonistas de la anécdota del principio, con la pregunta del problema. Así, se ha podido leer «la pudo perder cualquiera de los tres» o «es imposible de saber». Hay 37 participantes (4,12 %) que abordan el problema en términos probabilísticos, mencionando que es más probable que pierda Ana la segunda partida porque es la que más pierde (figura 3). Por otra parte, la intersección de estos dos últimos grupos no es el conjunto vacío, ya que hay cinco participantes que indican que es imposible de resolver, pero, caso de tener que dar una respuesta, por probabilidad, dirían que Ana. Por ejemplo, un participante señala que, en principio, no se puede averiguar porque se desconoce quién es el que ha empezado y luego lo tacha. Entonces escribe que sí que puede averiguarse, pero «para ello debemos hacer muchas probabilidades y debido a la escasez de tiempo no sé cómo resolverlo rápidamente». En relación con esto, hay también otros participantes que señalan que la respuesta es Ana, porque «Ana ha perdido porque tiene menos partidas jugadas», pero no mencionan que se trate de algo aleatorio, siendo posible que lo hayan reducido a una comparación de fracciones.


Respuesta razonada

Lo más probable es que fuese Ana debido a que tiene un número menor de partidas.

Figura 3. Argumento erróneo, en términos probabilísticos

Decíamos que es importante saber que se han jugado 21 partidas. No era algo trivial, puesto que 78 participantes (8,70 %) calculan que son 42 las partidas que se han jugado, haciendo directamente la suma, sin tener en cuenta que las partidas son jugadas por dos jugadores. Sin embargo, hay otros 14 participantes (1,6 %) que escriben que se juegan 14, 17, 18, 22, 23, 25, 27, 28, 40, 52 u 84 partidas. La mayoría de estos números responde a una operación concreta que aparece de forma explícita. Así, el 14 se obtiene de dividir la suma de las partidas que juega cada uno (42) entre tres.


Respuesta razonada

Ana: 10 partidas (jugó), no jugó 11 partidas $\frac{10+15+17}{2} = 21$ partidas en total

José: 15 partidas, no jugó 6 partidas

Marta: 17 partidas, no jugó 4 partidas

Ana pierde.

Rondas	Ana	José	Marta
1		X	X
2	X		X
3		X	X
4	X		X
5	X	X	
6		X	X
7	X		X
8		X	X
9	X		X
10	X	X	
11		X	X
12	X		X
13		X	X
14	X		X
15	X	X	
16		X	X
17	X		X
18		X	X
19	X		X
20	X	X	
21		X	X

X = juega

Figura 4. Respuesta parcial, que incluye la elaboración de una lista

Hemos mencionado que, entre los que resuelven correctamente el problema, hay 71 participantes (7,92 %) que emplean una lista, pero que no consiguen explotarla. Por ejemplo, la figura 4 muestra una resolución incompleta, que muestra una lista en forma de tabla, pero no argumenta nada a partir de ella. Esto es llamativo, porque recordemos que solamente han sido seis los participantes que han usado una lista y han aportado una resolución correcta. Además, en esta misma línea, hay otros 16 participantes (1,78 %) que utilizan un esquema o un diagrama y tampoco llegan a argumentar correctamente su respuesta.

Por último, nos encontramos con argumentos de lo más dispares, entre los que, quizá, podríamos destacar aquellos que ven el problema como una situación de proporcionalidad, calculando la fracción, a veces expresada como porcentaje, de partidas que juega cada uno. ¿Es posible que la estructura del enunciado les recuerde a un problema de repartos? Este error aparece en ocasiones combinado con otro, como partir de un número incorrecto de partidas (figura 5).

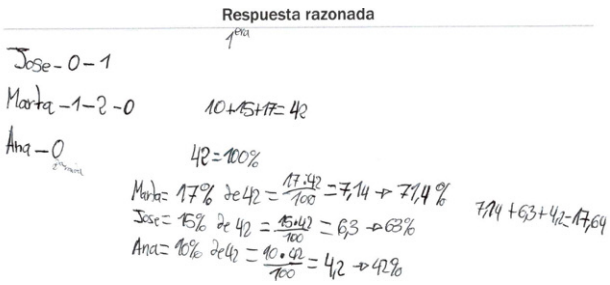


Figura 5. Resolución incorrecta que combina un error en el número de partidas y una comparación de porcentajes

No han faltado intentos de resolución que pueden resultar curiosos, como «el segundo en perder fue José, porque es el segundo que más ha jugado». Igualmente, se han detectado unos pocos intentos con ecuaciones, quizá pensando en que el álgebra todo lo puede (aunque nos quedaremos con las ganas de poder saber el motivo de emplear esa estrategia) y algunas tentativas con el máximo común divisor.

Conclusiones

En la corrección de estas pruebas es usual encontrar un gran número de respuestas en blanco, y otro tanto de planteamientos infructuosos. Las causas de este fenómeno pueden buscarse tanto en el no haber comprendido del todo el enunciado del problema como en carecer de estrategias y técnicas de resolución de problemas. Lo preocupante no es la escasa cantidad de participantes que llega a la solución correcta, razonándola convenientemente (no en vano, estamos en una competición y los problemas no son fáciles), sino esa abundancia de hojas vacías o sin ningún indicativo de haber puesto en marcha alguna estrategia o técnica de resolución de problemas.

Una de las técnicas de resolución de problemas más básica consiste en la elaboración de una lista, tratando de enumerar de forma sistemática los casos posibles. En este problema en particular, si bien no era necesaria, proporcionaba una mejor visión del problema y daba muchas pistas de lo que estaba pasando. Y no se trataba de una lista excesivamente larga. Esto nos debería servir para recordarnos ese primer bloque que abre los contenidos curriculares de todos y cada uno de los niveles de matemáticas. Existe un consenso en que la resolución de problemas debería ser el eje vertebrador de los contenidos, permitiendo el desarrollo de una verdadera actitud matemática (English & Gainsburg, 2016). En este sentido, es necesario saber distinguir entre lo que es enseñar sobre resolución de problemas, enseñar para resolver problemas y enseñar a través de la resolución de problemas (Gaulin, 2001).

Por último, desde aquí no podemos sino aprovechar estas líneas para aplaudir la participación del alumnado en esta olimpiada, así como a los profesores y a las familias que les han animado a ello.

Referencias bibliográficas

ENGLISH, L. D., y J. GAINSBURG (2016), «Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum», en L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 313-335. Routledge.

GAULIN, C. (2001), «Tendencias actuales de la resolución de problemas», *Sigma*, 19, 51-63.

Reflexiones matemáticas en una semana especial

por
Sonia Arruti Giménez
(CEIP Vadorrey-Les Allées, Zaragoza)

Si de pequeñita me hubieran preguntado sobre las matemáticas, mi respuesta hubiera sido que no me gustaban, por suerte ahora en la edad adulta y gracias a mi profesión me encantan. Las matemáticas están en todas partes, ¿a quién no le ha sonado el despertador y ha pensado 5 minutos más? las matemáticas son muy madrugadoras, nos hacen compañía en el desayuno con nuestros 250 mililitros de leche posiblemente mezclado con un poco de café o dos cucharadas de cacao. Sin darte cuenta, porque te estas preparando, miras el reloj y, ... ¡Hora de trabajar! Voy a mi coche con cuatro ruedas y 5 puertas, y unas señales redondas como un círculo, me recuerdan que no puedo pasar de 50 km/h y tengo que moderar la velocidad. Llego a mi cole, una mezcla de rectángulos, rectas, círculos y entro en mi clase llena de formas y figuras planas para esperar a mis 25 pequeños. 45 minutos tras 45 minutos van pasando las sesiones, sube y baja las escaleras, 2 tramos de 12 peldaños nada menos, que hace que mi corazón suba las pulsaciones a 140 porque lo hago corriendo. En todas áreas sin quererlo nuestras mates en silencio nos acompañan. Cuando salgo tengo varias cosas según el día pero lo que más me gusta es el que entreno, las mates y yo juntas nos vamos a correr unos kilómetros, dependiendo del cansancio lo hacemos más rápido o menos, pero allí siguen ellas, las infatigables matemáticas. Este es un día mío cualquiera, pero seguro que hay personas que tienen que cuidar de ¡1, 2 o 3 pequeñuelos!, todo lleno de orden: el menor con papá, el mediano a la ducha, ¿cuántos litros de agua gastará para ducharse? Y el mayor con mamá leyendo, oye, si su libro tiene 164 páginas y ya lleva leídas 36, ¿cuántas le faltarán por leer? Si alguien ha tenido suerte puede que se haya ido al cine,

esperemos que con descuento, ¿habéis ido últimamente? El precio de la entrada está por las nubes, las mates que son muy cinéfilas no se pierden ni una… Llega la hora de dormir, dicen que lo mejor es dormir 8 horas pero para aquellos que tienen insomnio puede que sea alguna menos y eso de contar ovejas…, cuenta la leyenda que alguien pasó de las unidades de millar…

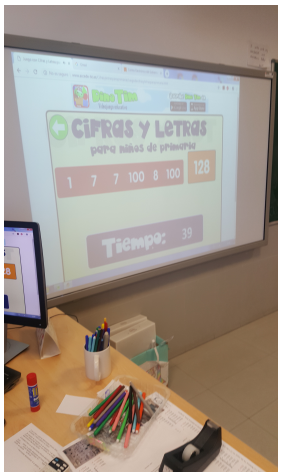
Nuestra semana matemática en el CEIP Vadorrey-Les Allées ha ido genial. La comunidad educativa ha estado implicada en esta semana matemática tan especial. A continuación iremos descubriendo que las mates y nuestro alumnado se han hecho amigos para crecer juntos de la mano.

Los más pequeñitos y pequeñitas del cole junto con 1.º y 2.º de Primaria han polinizado las flores por medio de la Beeboot. Han descubierto números, formas y colores de una manera más divertida con su amiga Bee. Han apretado botones a derecha e izquierda y de atrás-adelante para encontrar la solución a pequeñas cuentas. Los compañeros de 1.º han buscado los resultados de sumas y restas trabajando así el cálculo mental y los de 2.º incluso buscando el resultado de algunas multiplicaciones y sumas y restas más difíciles. Su cara al terminar la actividad lo decía todo, seguro que a partir de ahora el cálculo mental será más divertido.

¿Qué veo ahí? ¡Oh no, es un alfil que viene directo hacia mí1 ¡Torre, vamos a enrocarnos! Quién iba a pensar que nuestros peques de infantil se convertirían en auténticas piezas de ajedrez. Experimentaron en primera persona los movimientos de las piezas a la vez que trabajaban la organización espacial, derecha-izquierda, delante-detrás y el tiempo de movimiento-espera-movimiento. (*Ajedrezando*).

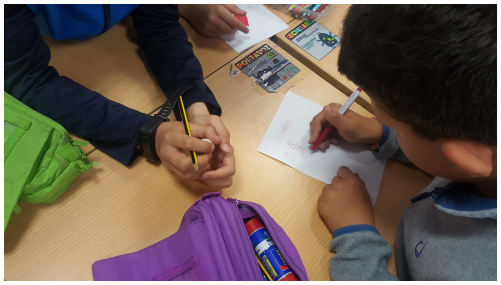
Los/as compañeros/as de primero jugaron a *¡El precio justo!* El mítico programa de televisión donde aproximarte lo más posible al precio de un producto te hacía ganar un premio. Trabajo de monedas, aproximación y estimación, poco más que decir más que… ¡a jugar!

Segundo llevaba desde el inicio de trimestre trabajando una o dos veces por semana el proyecto del *Supermercado*, trabajo de monedas, la realización de listas de la compra, sumas y restas con llevadas…, para llegar a la semana esperada para poder ir a comprar de verdad al súper que tenemos al lado. Los/as mayores cocinaban las mates pero para ello necesitaban ingredientes y 2.º fue el curso encargado de comprarlo. Conjuntamente con el profesorado se elaboró la lista de la compra con los ingredientes y en pequeños grupos compraron, sumaron, pagaron y vieron si estaban bien las vueltas. Estos cursos tuvieron la suerte de que pudieron comer los postres tan ricos que hizo el alumnado de 5.º y 6.º ¡qué suerte comerse las mates!



El alumnado de 3.º y 4.º disfrutó de un taller externo sobre *Matemáticas manipulativas*, trabajando los contenidos que en ese momento estaba viendo cada curso. Profesorado y alumnado quedaron encantados, además siguieron trabajando durante la semana con el material proporcionado por Alejandro Beltrán.

También jugaron a otro concurso clásico: *Cifras y Letras*, alguna profesora se aventuró también con la parte de letras y trabajar la lengua y con eso de decir cuántas letras tiene tu palabra las mates seguían estando en un primer plano. Encontramos unos generadores de cifras en Internet y se pusieron a ello en las clases de matemáticas. Hubo momentos de risas y de tensión pues el tiempo era un factor importante. En grupos, parejas o individual, todas las personas tenían cabida para llegar mediante operaciones al número exacto.



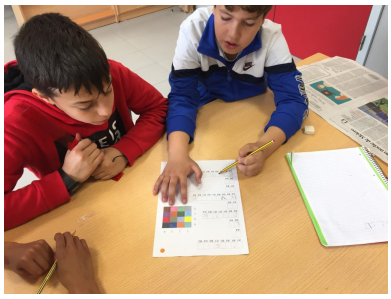
Nuestros mayores del cole, nos cocinaron las mates, tanto su tarta de manzana (6.º) como su bizcocho (5.º), estaban riquísimos. Con mucho mimo prepararon los ingredientes y trabajaron con las medidas, capacidades, fracciones, temperatura en el horno…, disfrutaron comiéndose las mates y además compartieron sus maravillosos postres.

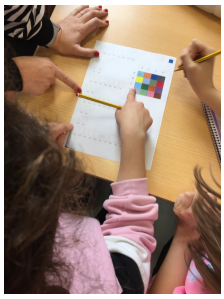
También disfrutaron del taller externo *Matemáticas y cine* por J. M. Sorando, donde a través de la visualización de pequeños fragmentos de dibujos, series y películas se dieron cuenta de que las matemáticas pueden aparecer como artistas invitadas. Ha sido muy bien valorado por el alumnado y profesorado.

Los 400 alumnos/as más los/as profesores pasamos por la exposición *En todas partes ¡Matemáticas!*. Muy interesante, a nuestros/as pequeños les gustó mucho, sobretodo el panel de ver cuántas pelotas caben dentro de una pelota de baloncesto. Los/as mayores crearon su propio arte en los edificios como versión propia al mudéjar. Una exposición que da mucho y nos hace tener una visión del poder que tienen las matemáticas porque realmente están en todas las partes. El alumnado no es consciente de ello, piensan que las mates están solo en la sesión que dura la materia como tal y a partir de esta semana me gustaría pensar que ese pensamiento ha cambiado. Se abrió también a familias.

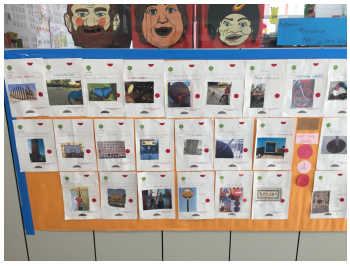
En ocasiones… ¡veo lagartijas! Y es que nuestra auxiliar que nos ha ayudado a montar nuestro mural de geometría imposible de Escher, me dijo que había soñado con ellas, y es que cómo cunden… En cada clase se ha proyectado una presentación con la vida y trabajos de este autor. Sus obras no han dejado indiferente al alumnado, ¿cómo que el agua sube? Debates sobre si los soldados bajan o suben las escaleras, la magia de convertirse en ave si subes y pez si bajas, ¡unas escaleras por las que puedes subir boca abajo!… Se quedaron maravillados y de ahí nuestro reto, ¿somos capaces de crear un mural generando espacios nuevos? Y aquí está nuestro resultado: cuando 400 alumnos/as, claustro, conserjes, personal de limpieza, extraescolares, se unen para crear *Artemáticas*.

Scaperoom matemático: ¿encontraron la fórmula matemática secreta? Solo con trabajo en equipo logrará descubrir dónde está. Hasta aquí podemos leer para no hacer *spoilers*.





La exposición fotográfica ha sido un éxito, cada alumno/a con ayuda de su familia se han recorrido las calles del barrio, parques e incluso Zaragoza completa para encontrar las matemáticas en nuestro entorno. Cada niño/a hacía una foto y le ponía título ¡os animamos a visitarla! ¡Inmortalizaron cosas asombrosas!



Transformers geométricos: una actividad improvisada por parte de algunas maestras del centro y es que la geometría da mucho juego ¿quién sino se resistiría a crear su robot a partir de la composición de figuras geométricas?

Ha sido una semana genial, nuestro objetivo ha sido dar visibilidad a las matemáticas por medio del humor, la magia, la creatividad, la manipulación…, para que cuando escuchen matemáticas tengan de ellas una visión amigable y pierdan el miedo que a veces se les tiene. Las matemáticas también son emoción, o si no «¿por qué estaba tan triste el libro de mates?» (ya, ya lo sé, chiste malo, pero a que os ha hecho reír, si alguien no sabe la respuesta que venga a nuestro cole a conocerla). Las matemáticas nos acompañan y esto es lo que hemos querido enseñar a nuestro alumnado, son necesarias en nuestra vida y siempre van a estar a nuestro lado. Ya que pasamos tantas horas juntos/as ¿por qué no llevarse bien, verdad?

El sondeo realizado al alumnado tras esta semana ha sido positivo, alguno decía «¡no sabía que las mates eran tan guay!» y es que profesorado y alumnado hemos abierto un abanico de recursos diferentes y experienciales para pasar una semana muy ¡*Matemágica*!

Recomendamos esta experiencia 100 %.

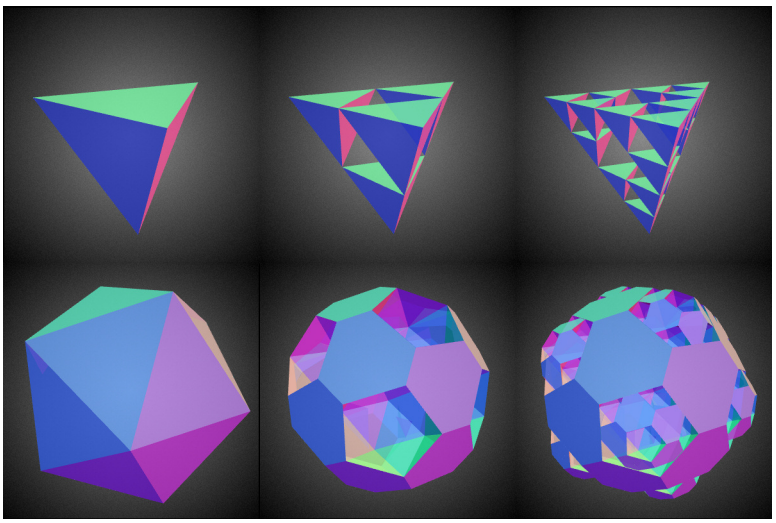
Agradecer al claustro de maestros/as del CEIP Vadorrey Les Allées dejarse engañar para embarcarse en esta semana de Conexión, sin su ayuda y predisposición esta semana no hubiera sido posible.

Fractales platónicos

por
Pedro Latorre García
(CPEPA Gómez Lafuente, Zaragoza)

Últimamente no comienzo esta sección con alguna de mis brillantes reflexiones. Hace ya mucho tiempo, asistí a una charla cuyo ponente afirmaba que su objetivo era transmitir un máximo de dos o tres ideas, reflexión que comparto plenamente. En demasiadas ocasiones me olvido de este hecho y trato de abarcar en mis clases mucho más, lo cual no suele servir para nada. ¿Quiénes son los culpables de que incurra en este error? Quizá los redactores del currículo. Tal vez mis limitados alumnos. Porque desde luego, yo no tengo la culpa.

Voy a dar una pequeña explicación sobre la animación <http://5.134.115.37/platon.html> que ya lleva unos cuantos años colgada en nuestra web. En algún momento encontré la magnífica página <http://paulbourke.net/fractals/polyhedral/> del matemático Paul Bourke. Entre sus múltiples recursos me llamó la atención el artículo *Platonic solid fractals and their complements* y traté de hacer la construcción que se indicaba en Three.js, mi biblioteca favorita de gráficos 3d.



El programa va a generar una sucesión de figuras siguiendo el siguiente algoritmo: partiendo de un sólido platónico distinto del cubo (nivel 0) se crean copias iguales y más pequeñas del mismo, tantas como vértices tiene el poliedro; después se desplazan desde el centro del sólido inicial siguiendo cada una de las direcciones determinadas por sus vértices. La escala de las copias y la posición de las mismas está calculada para que el resultado final reproduzca la forma del poliedro original y sus partes estén conectadas entre sí. Este conjunto de poliedros es la primera figura de la sucesión (nivel 1). En el siguiente paso se realiza el mismo proceso con cada uno de los nuevos poliedros, obteniendo la siguiente figura de la serie (nivel 2). Si se reiterase de forma indefinida este procedimiento, la figura obtenida sería autosemejante, propiedad que caracteriza a los objetos fractales.

Las imágenes representan los tres primeros niveles de la construcción, eligiendo como sólidos platónicos el tetraedro y el icosaedro. La primera fila muestra la construcción descrita. En la segunda vemos el negativo, la parte que hemos quitado al sólido inicial.

El fractal límite es fantasmal; a pesar de que el número de poliedros crece de forma exponencial, cada vez son más pequeños. En el nivel 6 del tetraedro se observa ya este hecho. La figura final se queda a medio camino entre una superficie y un volumen, y los matemáticos le asignan una dimensión inferior a 3.

Si el sólido platónico es el hexaedro la construcción es distinta. Se divide el cubo en 27 cubitos iguales y se descartan los siete que conforman la cruz central, dejando los veinte restantes. Se aplicaría este algoritmo de eliminación a los cubitos supervivientes. La figura límite de este proceso recibe el nombre de esponja de Menger.

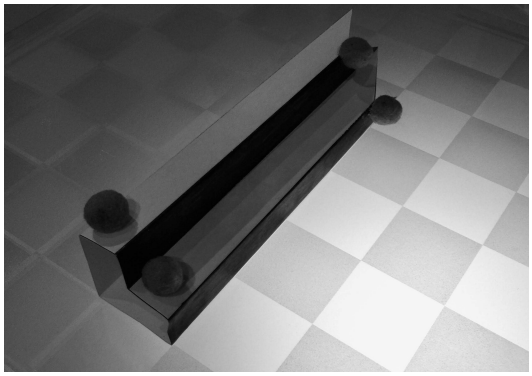
Ganadores del VI Concurso de radionovelas matemáticas

Revisados todos los trabajos presentados al concurso, el jurado ha considerado como ganadora en la categoría de primaria a la radionovela *Adiós Mates.* Autores: Héctor de Félix Buisán, Iker Tipan Pillajo y Carlota Ortega Romea

del Colegio Calasancio de Zaragoza. En la categoría de secundaria la radionovela premiada corresponde a *Scapecity*. Autores: Andrea Ballester García, Alba Fernández Aparicio y Lucia Crespo Domínguez del Colegio Salesiano Nuestra Señora del Pilar de Zaragoza. Para escuchar todos los trabajos presentados visitar la página:

http://www.aragonradio.es/iniciativas/conexion-matematica

Ganadores de los concursos de la web de CM



El ganador de la IV edición del Torneo de tangram fue Jesús Villoslada Díaz del Colegio Cristo Rey Escolapios de Zaragoza al completar las 54 figuradas planteadas. La información completa se encuentra en:

http://conexionmatematica.catedu.es/tangram/

El primer premio del III Concurso de figuras imposibles correspondió a Carla Aguiló Celma del Colegio La Inmaculada de Alcañiz (Teruel). Para ver más detalles visitar:

http://conexionmatematica.catedu.es/concurso-figuras/

La entrega de premios tuvo lugar el 10 de mayo, antevíspera del Día Escolar de las Matemáticas, en las instalaciones de la Corporación Aragonesa de Radio y Televisión.

Fase final del IV Torneo de tangram

La gran novedad de los concursos de la web fue la celebración de una fase final de carácter presencial para alumnos de primaria. Tuvo lugar el día 11 de mayo en el incomparable entorno de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Participaron seis alumnos que previamente habían demostrado su habilidad en la tradicional modalidad online. El ganador de la prueba fue Pedro Ibarra Gay del Colegio-Escolanía de Infantes de Ntra. Sra. del Pilar de Zaragoza que resolvió las nueve figuras que se le plantearon. Nuestro agradecimiento a la organización de la XVIII Olimpiada Matemática de Aragón por su amable colaboración y sus excelentes bocadillos de tortilla.

Agradecimiento. Los coordinadores más veteranos del programa Conexión Matemática han dado paso a las nuevas generaciones (ya era hora). Esto me convierte en el coordinador más viejo y con menos pelo. Mi más profundo agradecimiento a Ricardo y Daniel por aguantarme tanto tiempo. Espero que Maite y Arancha sean igual de pacientes que Alex.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Web: <http://sapm.es>

Mayo de 2019

ISSN: 2386-8821e

BY NC SA