Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 39
Marzo de 2021

Acaba ya marzo, que desde el punto de vista de la Sociedad ha resultado un mes especial.

Durante este mes se han seguido recibiendo soluciones de los alumnos de los problemas de preparación de la olimpiada. Esta *fase* no es nueva, pues llevamos haciéndola hace unos cuantos cursos, así que su *normal* funcionamiento nos anima a pensar que estamos recuperando algo de normalidad. Quizás sea solo una ilusión, pero existe una probabilidad alta de que podamos celebrar una final presencial, aunque reducida. Debemos agradecer a la Facultad de Ciencias que nos haya abierto esta posibilidad, manteniendo así su habitual predisposición a colaborar con nosotros en esta actividad. Así pues, la olimpiada de 2021, con sus novedades, sigue su camino. Ahora mismo está abierto el plazo para inscribir alumnos de los centros que previamente se habían inscrito.

Pero no cabe duda de que el acto central de este mes ha sido la celebración de nuestra cuarta Jornada de Educación Matemática en Aragón. Decidimos hacer el esfuerzo de organizarla en versión no presencial, a pesar de la dificultad que entrañaba. El trabajo realizado dio sus frutos y podemos calificar la experiencia de satisfactoria. En todas las actividades tuvimos una media de asistencia algo superior a las doscientas personas. Lógicamente hacerlo a distancia propició superar las cifras de las anteriores ediciones presenciales. Claro, la presencialidad da otras cosas de gran valor. Aunque muchos de los asistentes nos comunicaron su deseo de que la quinta vuelva a ser on-line, esperamos poderla celebrar presencialmente; o quizás con una fórmula mixta. Me gustaría volver a agradecer a los asistentes su presencia y, sobre todo, a ponentes de plenarias, ponencias, talleres y comunicaciones haber compartido con todos nosotros sus ideas. En la web de la jornada se pueden descargar las presentaciones y en *Entorno Abierto* iremos publicando la versión escrita de las comunicaciones y alguna ponencia (en este número ya se pueden leer tres).

Con lo que respecta a algunos concursos, decir que ya se ha cerrado el plazo de participación en el de radionovelas matemáticas; el jurado ya está trabajando. Está abierto el de Tangram, del 1 de febrero al 9 de abril [enlace]. Y también el de microrrelatos, del que podéis descargar las bases aquí. Os animamos a participar con vuestro alumnado.

Y tal y como insistimos en la JEMA os animaros a uniros a la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas. Cuántos más estemos, más actividades podremos montar, más ideas podremos poner en marcha, más se nos tendrá en cuenta... Se trata de que el borde de este *entorno abierto* centrado en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se siga expandiendo.

Daniel Sierra Ruiz
Presidente de la SAPM

Sumario Interactivo

Logaritmo ¡no te tenemos miedo! La calculadora científica como artífice para arribar a la definición de logaritmo
Acercándonos a la probabilidad en 1.º ESO
María Andresa Casamayor de la Coma (1720-1780)
Dos rombos y un destino (Penrose lo sabía)
Matemáticas en verso. Dos libros del siglo XIX
Criptografía para principiantes: Método Della Porta
Con mucho arte

únete
a la SAPM
click

Logaritmo ¡no te tenemos miedo! La calculadora científica como artífice para arribar a la definición de logaritmo

por
Patricia Bozzano
(Liceo «Víctor Mercante» - Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires)

Se presenta una propuesta para introducir el concepto logaritmo en la escuela secundaria mediante la utilización de la calculadora científica.

La propuesta nace de la experiencia en las clases de matemática en las cuales dicho saber forma parte de la planificación de la materia y de una mirada propia como docente e investigador novato en matemática educativa.

Con el diseño de un conjunto de tareas se buscó dar lugar a la aparición de la definición de logaritmo de un número. Dicho diseño ya tiene tres ocasiones de ser implementado en estudiantes de 5.º año de una escuela argentina.

Propiciando el trabajo autónomo, la exploración mediante la utilización de la calculadora científica, el objetivo consiste en que el estudiante, por sus propias acciones, le dé sentido a la operación logaritmo y sus propiedades.

Introducción

En innumerables ocasiones los adultos relatan sus peores experiencias de aprendizaje cuando de matemática se trata, teniendo a los logaritmos como villanos.

En el plan de explicar tales situaciones podemos, por ejemplo, avizorar poco o nulo gusto por la matemática, experiencias de clases de estilos magistrales y expositivas. Clases en las que los estudiantes tienen poco o nada de protagonismo. Aceptemos que larga puede ser la lista de causas que pueden producir escasa comprensión de la operación logaritmo, como también la falta de sentido de su significado y uso.

Sin entrar aquí en discusión sobre las diferentes corrientes y modelos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sí se señala la completa adhesión a aquellos modelos y teorías que se refieren a las prácticas que se centran en la acción de los estudiantes (por ejemplo, la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, 1986). Por lo que en el texto que sigue se comparte un conjunto de estrategias puestas en marcha en ocasiones de introducir logaritmos en las clases de matemática.

El diseño

En busca de que el estudiante, mediante sus acciones, arribe por medios propios a la definición de logaritmo es que las actividades se desarrollan en gran parte con la utilización de la calculadora científica. Cabe aclarar que las actividades que aquí se presentan solo contemplan el carácter operatorio —el logaritmo como la séptima operación—.

Se le da a la calculadora el estatus de asistente para que el estudiante, mediante cálculos, aproximaciones y estimaciones, experimente patrones que conduzcan a la exploración y desarrollo del concepto logaritmo de un número (Wenzelburger, 1990).

El orden de las tareas responde a una lógica basada en lo que Sierpinska (Gómez, 1996) nos ilustra sobre la comprensión en matemáticas. Partiendo de actividades que el estudiante debe realizar centrándose en los resultados que va obteniendo, para luego ser capaz de anticipar resultados por haber logrado cierto nivel de conceptualización.

Para el diseño se realizó una revisión histórica del desarrollo de la idea de logaritmo, su conceptualización y sus usos.

En términos de Bishop (1991) se le concede a la matemática una visión socio-cultural, por lo que la inclusión de elementos históricos de los saberes funciona como una especie de catalizador, provee al estudiante de una imagen humanizada del saber puesto en juego, permitiendo reconocer en él el carácter de bien cultural, bien que pertenece a toda la humanidad.

Grageas históricas

Aprovechando el recorrido matemático realizado por los estudiantes, recurrir a pasajes de la historia de logaritmo en los que se menciona su importancia a la hora de simplificar cálculos que generaron un beneficio, por ejemplo, para los astrónomos (Rey Pastor y Babini, 1986), contribuye al plan en el cual los estudiantes se familiarizan con el concepto.

Desde los inicios se conocía que $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, cuestión que ayudaba a realizar cálculos que demandaban multiplicaciones mediante sumas (Stewart, 2008). Si bien es verdad que con la llegada de artilugios tecnológicos los cálculos son sencillos de resolver dejando de ser la razón para el uso de logaritmos como en siglos pasados, las orientaciones curriculares de la planificación de la matemática escolar se apoyan en el rol del logaritmo como inverso de exponenciales a la hora de llevarlo al aula.

Definición de logaritmo: $\log_b a = e \Leftrightarrow b^e = a$, donde $b > 0$, siendo b la base, a el argumento y e el resultado del logaritmo.

La lógica de las sucesivas tareas que conforman las estrategias da oportunidades para que el estudiante, como investigador, con sus acciones guiadas y mediante el uso de la calculadora arribe a conclusiones correctas que conducen a tal definición.

Contexto

Para las actividades se contemplaron varios aspectos: el nivel escolar, los recorridos matemáticos previos que tuvieron los estudiantes, las orientaciones curriculares a nivel institucional, el propósito de lograr el aprendizaje esperado.

El conjunto de tareas se pensó y viene siendo implementado en estudiantes de 16 años que cursan 5.º año de la escuela secundaria, según el modelo curricular para la escuela secundaria de la República Argentina.

Los grupos de estudiantes, siendo ellos tres al momento de compartir este relato, iniciaron previamente el recorrido completo de la potenciación dos años antes al momento de implementarse este conjunto de tareas. En aquellas ocasiones el tratamiento de la potenciación involucró investigar los exponentes, también contempló el desarrollo y trabajo de la notación científica, la aplicación de leyes y propiedades de la potenciación acompañada de la representación de la radicación como una potenciación.

Tareas

El diseño consiste en un instrumento a implementar en varios momentos de una o a lo sumo dos sesiones de 40 minutos cada una. Tiene forma de guion con 10 ítems para completar.

Como se muestra en la figura 1, se inicia con un recorrido sobre los conocimientos previos y valiosos para luego formular la conceptualización buscada.

ETAPA I. REVISIÓN

1.Completar, sabiendo que a es cualquier número real, excepto 0.

$a^n \cdot a^m =$	$a^n : a^m =$
$(m \neq 0)$ $a^{\frac{n}{m}} =$	$a^{-n} =$

2.Obtener:

$5^2 =$	$(\frac{-1}{3})^2 =$	$0,2^2 =$	$64^{\frac{2}{3}} =$
$8^{-1} =$	$(-5)^2 =$	$1,5^{-2} =$	$(-5)^3 =$

Figura 1. Tareas para recordar saberes previos

Como siguiente paso (figura 2), se convoca mediante la tarea a indagar mediante el uso de la calculadora científica y la nueva tecla log.

ETAPA II. EXPLORACIÓN

3.Haciendo uso de la calculadora encontrar los resultados de cada operación, buscar un patrón y explicar el significado de la operación que se realiza.

$log\ 1 =$	$log\ 100 =$
$log\ 10 =$	$log\ 1000 =$

si
log X = 6
¿cuánto es x?

Figura 2. Tareas con uso de calculadora científica

Es aquí cuando se genera la oportunidad de introducir aspectos históricos de la matemática, la aparición y necesidad del logaritmo en base 10.

Posteriormente se da lugar a formular en forma oral, para luego volcarlo en forma escrita, las sospechas de los estudiantes sobre lo que ocurre al utilizar la tecla log. Inmediatamente después, se los invita a seguir explorando con el uso de la calculadora. Dando tiempo a la discusión de resultados, ideas, conjeturas, se genera una nueva etapa en la que deberán arribar a las respuestas de logaritmos con distintas bases por medios propios, haciendo uso de los saberes anteriormente contemplados, pero ya no con la calculadora (figura 3).

ETAPA III. CONJETURAR Y VALIDAR

4.A partir de las respuestas de la ETAPA II, redactar qué podrá significar log

5.Utilizando la calculadora, obtener (redondear con 2 cifras decimales):

$log\ -8 =$	$log\ 2,9 =$	$log\ 8 =$
$log\ (\frac{2}{7}) =$	$log\ 5 =$	$log\ 123 =$

6.Explicar qué se observa, justificando las respuestas que provee la calculadora.

ETAPA IV. INSTITUCIONALIZACIÓN

7.Obtener:

$log\ 0,1 =$	$log_2\ 2 =$	$log_{\frac{7}{3}}\ (\frac{25}{49}) =$	$log_4 2 =$	$log_2\ 0,0625 =$
$log_3(\frac{1}{3}) =$	$log_2\ 8 =$	$log_6\ 36 =$	$log_{568}\ 1 =$	$log_{\frac{1}{3}}\ 9 =$

Respuestas: **ejercicios 4. y 6.**

Figura 3. Tareas para permitir formular conjeturas

En ocasión de discutir sobre los resultados del ítem 7 y del ítem 8, se retoma la historia de la matemática respecto a la necesidad de algoritmos para facilitar cálculos en ausencia de calculadoras.

Se les presenta nuevamente el desafío de dar evidencias del manejo correcto del objeto logaritmo de un número con una nueva tarea (figura 4).

8. Obtener el valor de x

$log_x 49 = 2$	$log_5 x = -1$	$log_4 64 = x$	$log_{\frac{1}{36}} 36 = x$	$log_2 (\frac{1}{4}) = x$
$log_{\sqrt{6}} 6 = x$	$log_7 x = -2$	$log_{4789} x = 0$	$log_9 x = \frac{1}{2}$	$log_{\frac{1}{5}} 25 = x$

Figura 4. Tareas para afianzar lo conceptualizado

9. Obtener cada logaritmo con la calculadora, luego sacar conclusiones. Redondear en dos decimales.

$ln\ 14$	
$ln\ 2$	
$ln\ 14 + ln\ 2$	
$ln\ (14 . 2)$	
$ln\ (14 + 2)$	
$ln\ 14 - ln\ 2$	
$ln\ (14 : 2)$	
$ln\ (14 - 2)$	
$ln\ 14^2$	
$2 \cdot ln\ 14$	
$(ln\ 14)^2$	
$ln\ \sqrt{14}$	
$\sqrt{ln\ 14}$	
$\frac{1}{2} \cdot ln\ 14$	

10. Conclusiones:

Figura 5. Tareas para explorar propiedades

Para la siguiente actividad, se muestran dos opciones. La segunda surgió a partir de la puesta en escena y posterior reformulación de la secuencia. Se propone explorar con la calculadora posibilidades de establecer relaciones entre los cálculos que llevan adelante (figura 5).

Se decide involucrar una nueva tecla de la calculadora ln para esta tarea (figura 5) dada la reiterada detección de errores en ocasiones previas vistas a partir de la aparición de un obstáculo didáctico.

Además de su presentación e indicación de la tecla correspondiente en la calculadora científica, se dedicó el tiempo suficiente para que los estudiantes se familiaricen, definan y utilicen el logaritmo natural.

Así, queda institucionalizado que $\log_e x$ se escribe $\ln x$ donde $e = 2{,}718\ldots$ (con 3 cifras significativas).

Algunos resultados

Para ilustrar lo trabajado por los estudiantes, aquí se muestran algunas de las intervenciones que hicieron en forma escrita, por ejemplo, en la primera parte del instrumento (figura 6). Dado el escenario de educación virtual a causa del confinamiento por la pandemia, estas imágenes corresponden al grupo de 5.º año del 2020. A causa de las facilidades y prestaciones de la plataforma utilizada para las reuniones en videoconferencia, todos los participantes podíamos editar en simultáneo lo que se compartía en pantalla, siempre y cuando el docente, en el rol de administrador, otorgue el permiso de edición.

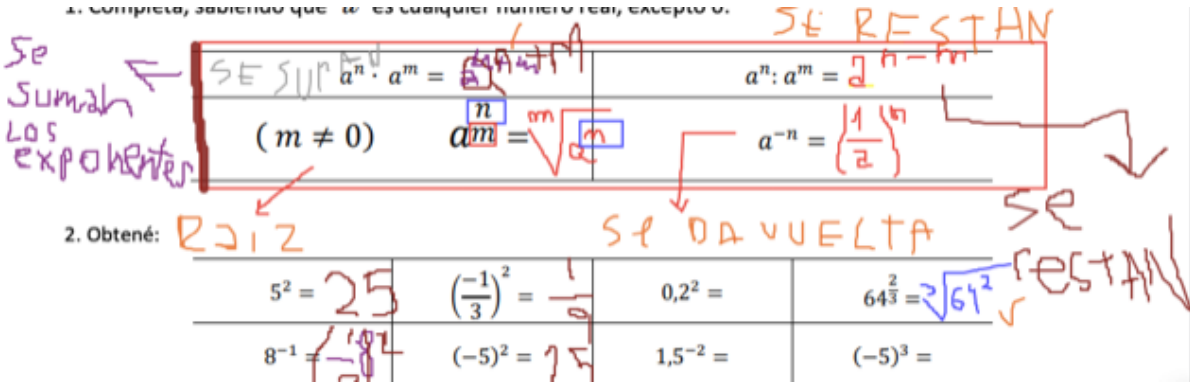


Figura 6. Intervención de los estudiantes

Con esta herramienta, se garantizó la acción de los estudiantes y el monitoreo de sus acciones simultáneamente.

Una vez atravesadas aquellas tareas que conducían a la conceptualización de logaritmo de un número, haciendo uso del logaritmo en base 10, un estudiante propuso el intervalo de números reales en el que $\log 10$ debe tener su solución. Este razonamiento lo expuso oralmente, compartiendo con el resto de los participantes de la clase su observación sobre $\log 10$ y $\log 100$, concluyendo que si:

$$10 < 20 < 100 \text{ entonces necesariamente } \log 10 < \log 20 < \log 100,$$
$$\text{por lo que } 1 < \log 20 < 2. \text{ Sugirió que } \log 20 \text{ deberá estar más cerca de 1 que de 2.}$$

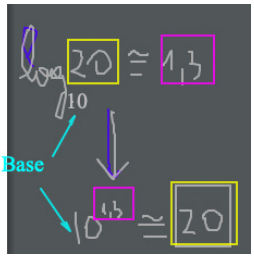


Figura 7. Ejemplo para reforzar la conceptualización lograda

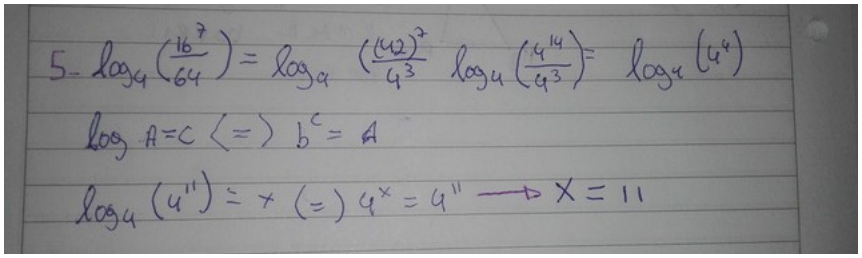


Figura 8. Algunos errores detectados

Cuando se recurrió a la calculadora, se validó la conjetura y se reforzó la conceptualización hallada (figura 7).

Cuando se señala la importancia de los saberes previos se hace pensando, entre otras y varias cuestiones, en resoluciones de tareas en las que aparecen diversidad de errores. En la figura 8 se pueden observar los errores cometidos en la notación, cuya razón recae en el uso de la memoria y no así en la conceptualización del saber en juego y su relación con otros saberes.

A modo de cierre

Los profesores de matemática buscamos el aprendizaje de nuestros estudiantes. En el proceso y con la experiencia emprendemos la búsqueda de artificios, herramientas, etc, que nos ayuden a lograr tan esperado objetivo. Leemos, estudiamos, aprendemos de colegas y de las teorías didácticas. Experimentamos en nuestras aulas, ponemos a prueba estrategias, las evaluamos, las reformulamos. El proceso nunca finalizará, pues nuestros estudiantes no son siempre los mismos y los escenarios tampoco.

En este último punto, el 2020 nos dio la oportunidad de explorar, poner en práctica, evaluar experiencias. En un escenario de educación virtual es inútil, contraproducente dejar de lado la calculadora científica, ignorar su utilidad. Tanto los teléfonos móviles como las computadoras poseen versiones de calculadoras y calculadoras científicas. Nuestra responsabilidad recae en contemplar la posibilidad de su uso y diseñar actividades que se apoyen en ellas.

Cualquier adulto recurre a la calculadora de su teléfono móvil cuando necesita realizar algún cálculo, si ese adulto también la utilizó para definir, por ejemplo, logaritmo de un número, es de esperar que no considere al logaritmo como un villano. Por el contrario, se desea que esos pasajes de su vida escolar en las que accedió al concepto de logaritmo impriman recuerdos agradables además del aprendizaje deseado.

Bibliografía

BISHOP, A. (1991), *Enculturación matemática*, Paidós, Barcelona.

BROUSSEAU, G. (1986), «Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7 (2), 33-115 (traducción de J. Centeno, B. Melendo, J. Murillo).

GÓMEZ, P. (1996), «Una compresión de la comprensión en matemáticas», *Revista EMA*, 1(3), 233-243.

REY PASTOR, J., y J. BABINI (1986), *Historia de la matemática (Vol. 2)*, Gedisa, Barcelona.

STEWART, I. (2008), *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*, Crítica, Barcelona.

Acercándonos a la probabilidad en 1.º ESO

por
Aurora Domenech Penón[1] y Sergio Martinez-Juste[1, 2]
([1]IES Pilar Lorengar, [2]Universidad de Zaragoza)

Presentamos una secuencia de actividades de probabilidad para 1.º de ESO, en la que a través del juego con material manipulativo, y con un enfoque a través de la resolución de problemas, los alumnos se aproximan al lenguaje probabilístico, al concepto de variabilidad muestral, al análisis y recogida de datos en un experimento y al uso de herramientas para abordar problemas combinatorios y de probabilidad.

¿Cómo surge la actividad?

Esta actividad surge a partir de un seminario incluido en el Plan de Formación de Centro sobre formación específica en Didáctica de las Matemáticas que llevamos a cabo en el IES Pilar Lorengar durante el curso 18/19 y que continuamos en el 19/20 en la medida que nos permitió la situación sanitaria. Este seminario apoya y complementa un proyecto de innovación educativa reconocido por la administración de la Comunidad Autónoma de Aragón llevado a cabo en el curso 18/19 basado en la cooperación docente para el desarrollo de unidades didácticas mediante el desarrollo de Lesson Studies (Martínez-Juste, 2020; Martínez-Juste y Domenech, 2019).

Durante esos dos cursos, los componentes del Departamento de Matemáticas recibimos formación de profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza. De este seminario salieron ideas para diseñar diferentes unidades didácticas, entre ellas la de probabilidad en 1.º ESO que presentamos aquí, para las que nos dio pautas Pablo Beltrán, profesor asociado en la Universidad de Zaragoza, que fue quien impartió la sesión del seminario dedicada a probabilidad y estadística.

El bloque del currículo Estadística y Probabilidad se trabaja habitualmente al final de curso por lo que está un poco «relegado al olvido»… Sin embargo, consideramos que es importante trabajar este bloque desde la perspectiva de dotar al alumnado de herramientas que le ayuden a desarrollar una cultura estadística y un razonamiento probabilístico que les permitan extraer conclusiones válidas y coherentes en situaciones no deterministas.

Fischbein (1975) defiende la idea de dar a los alumnos la oportunidad de resolver problemas de incertidumbre a edades tempranas confiando en la intuición probabilística de los niños a la hora de asumir un determinado juicio en una situación aleatoria o de incertidumbre. También, Shaughassy (1992) recomienda la introducción al mundo de la probabilidad y estadística desde un modo experimental. Además, históricamente, la probabilidad ha venido asociada desde hace miles años a situaciones de juego, sin ser formalizada hasta mucho más tarde (Díaz Godino y otros, 1996).

Teniendo en cuenta lo anterior, y los diferentes significados que pueden elegirse para abordar la probabilidad (Arce y otros, 2019), a saber, intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático, nos decantamos por diseñar, para 1.º de ESO, una actividad experimental y tratada desde el juego (el juego predispone al alumnado a la participación y a sentirse protagonista de lo que va sucediendo en el aula). A lo largo de la actividad, el alumno aprende a dar respuestas a otras situaciones menos contextualizadas reflexionando sobre los resultados obtenidos en los juegos. Hacia el final de la secuencia, se introduce una importante herramienta para abordar problemas de combinatoria y probabilidad como son los diagramas de árbol (Roldan y otros, 2018).

Actividad

En las sesiones de clase los alumnos están agrupados en grupos de 3 o 4 personas. Es deseable que sean dos los profesores que dinamicen esta actividad dado que se genera en el aula un cierto «barullo» y así un docente va recogiendo los resultados de los grupos en el momento, y el otro pasando por los grupos centra la actividad y resuelve los problemas que puedan surgir. Sin embargo, también hemos experimentado con la propuesta en grupos con un único docente.

1.ª sesión: Introducción y *Carreras de caballos*

Introducimos la unidad didáctica tanteando el nivel de intuición del alumnado sobre situaciones de incertidumbre y su vocabulario probabilístico. Para ello, comenzamos la sesión pidiéndoles que acaben una serie de frases (figura 1), y luego respondan a una serie de preguntas, de forma que aparecen ya así expresiones como: «probable», «más o menos probable que», «siempre pasa», «pasa a veces», «esto es imposible», «eso siempre será así», etc. Entramos de esta forma en el campo de la aleatoriedad, aclarando y debatiendo vocabulario de probabilidad. Esta actividad se basa en las recomendaciones del primer capítulo del trabajo de Díaz y otros (1996).

Figura 1. Frases que se proyectan en el aula para iniciar la unidad didáctica

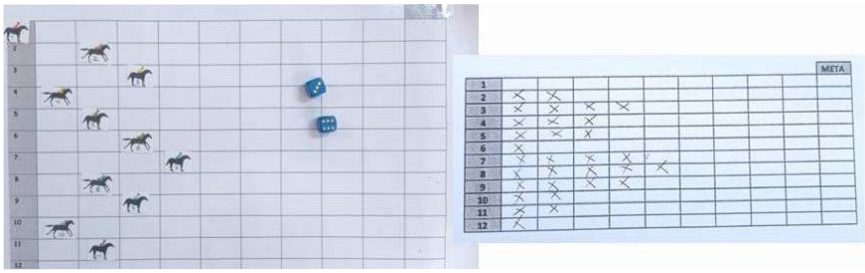


Figura 2. Tablero de la carrera de caballos (izquierda) y ficha personal para registrar los resultados (derecha)

Una vez terminado el debate se explica el juego que van realizar que consiste en una carrera de caballos. Hay 12 caballos numerados del 1 al 12. Cada jugador, por turno, va tirando los dos dados y se suman las puntuaciones de ambos. El caballo que tiene el dorsal del resultado obtenido avanza una casilla en el tablero y así sucesivamente. Gana el caballo que antes llegue a la meta y en dicho momento termina la carrera. Antes de comenzar, tras explicar las reglas, cada miembro del equipo debe «apostar» por un caballo para ser el ganador. Se pretende observar si algún alumno apuesta por el suceso imposible «gana el caballo 1» o por sucesos poco probables como «gana el caballo 12». Además, si se realizan varias carreras, esta apuesta inicial permite observar si estas creencias se modifican.

Empieza el juego y cada alumno en su cuaderno va a ir reproduciendo lo que sucede en el tablero (figura 2). De esta manera los alumnos tienen una representación del diagrama de barras del experimento.

Cuando acaba la partida, un miembro del grupo traslada el resultado al profesor, que lo volcará en una hoja de cálculo ya preparada para ello, para poder realizar después la comparativa de lo que ha sucedido en los demás grupos.

NUMERO	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	TOTAL
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	2	0	0	2	1	1	1	0	1	0	0	11
3	1	1	0	5	4	4	3	2	2	2	4	6	2	2	38
4	5	3	1	3	4	2	4	2	1	2	0	4	4	2	37
5	3	6	4	5	6	9	5	2	10	6	3	4	5	4	72
6	2	7	5	6	10	10	10	2	7	5	5	5	8	5	87
7	9	5	10	10	9	5	6	10	8	3	7	10	10	3	105
8	10	8	5	6	7	9	7	2	7	10	10	6	7	5	99
9	7	7	5	3	3	7	8	4	8	2	3	8	4	6	75
10	2	10	2	5	1	10	9	0	5	5	6	2	0	2	59
11	2	3	2	4	5	2	3	0	4	2	5	3	2	1	38
12	1	1	0	0	0	3	0	1	0	0	1	1	2	0	10

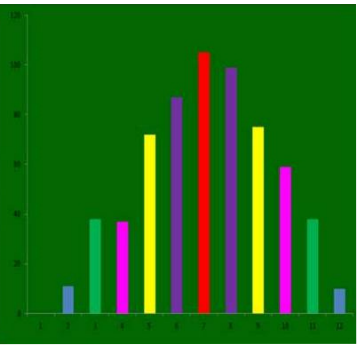


Figura 3. Resultados de las diferentes carreras (izquierda) y diagrama de barras con el acumulado de todas las carreras (derecha)

2.ª sesión: Recogida de datos, comparaciones y bingo (BEANO)

En esta sesión se presentan y debaten los resultados que obtuvieron en el juego todos los grupos. Presentamos el documento generado en tres clases de unos 28 alumnos cada una, aunque se realizó en cinco grupos. Esta recoge un total de 631 tiradas (figura 3).

Se establece un debate interesante al responder a preguntas como: «¿algún caballo avanza más rápido que otro?», «¿alguno no avanzó nada?», «¿siempre gana el mismo dorsal?», «¿en todos los grupos ha pasado lo mismo?».

Una vez comentados los resultados se realiza un «bingo» (figura 4). Este juego es una adaptación casi sin variaciones del juego BEANO propuesto por Vickery (2012). El objetivo es ver si han intuido el patrón de probabilidad que se obtiene al lanzar sucesivamente dos dados y sumar sus puntuaciones. A través de este tipo de actividades se pueden estudiar también las intuiciones de los alumnos sobre la probabilidad de cada caso, la variabilidad o la media muestrales. Cuestiones en las que, en general, los alumnos de secundaria, o incluso de bachillerato, tienen ciertas carencias (Begué y otros, 2018).

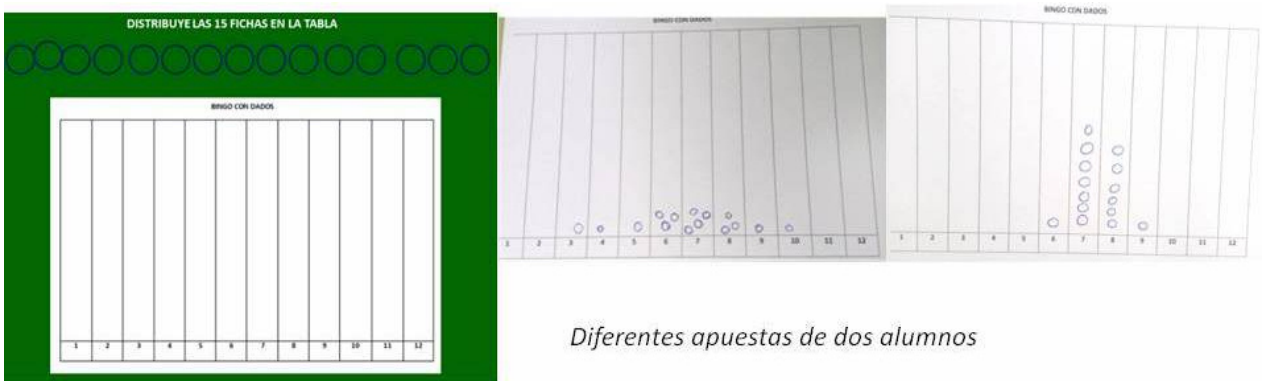


Figura 4. Cartones del juego y algunos ejemplos de distribución de las fichas

Los estudiantes disponen de 15 fichas (que las simbolizan con círculos en sus cartones) y deben apostar las 15 entre los números 1 y 12. Las pueden apostar como ellos deseen, y vamos a volver a jugar con los dados. Se van lanzando los dados, cantando la suma de las puntuaciones. Si ellos tienen una ficha en esa puntuación, la tachan o pintan. Gana quien consiga tachar o pintar sus 15 fichas.

Se puede repetir el bingo analizando cuáles han sido las distribuciones de fichas ganadoras en la primera tirada y haciendo preguntas como: ¿Cambiarías tu apuesta? ¿Por qué?

Termina la clase analizando las diferentes apuestas y contrastando los bingos ganadores con la distribución comentada al comienzo de clase.

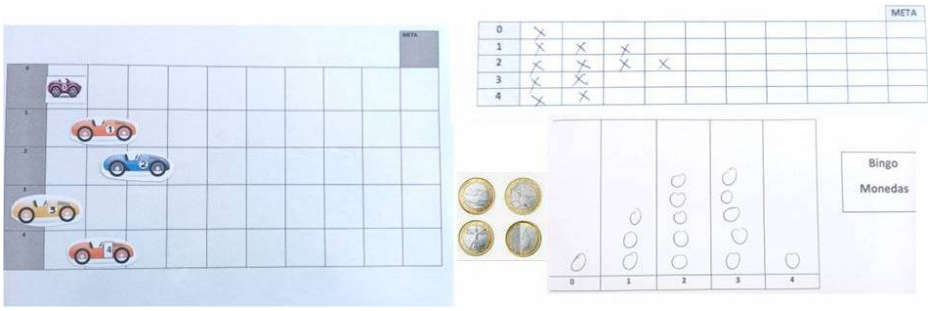


Figura 5. Tablero de la carrera (izquierda), ficha personal para anotar los resultados (derecha arriba) y cartón de Bingo (derecha abajo)

3.ª sesión: *Contamos caras de monedas*

En esta sesión se repiten los juegos de las sesiones anteriores, pero con otro experimento aleatorio. En este caso se trata del lanzamiento de cuatro monedas de forma simultánea y se cuentan cuántas monedas han caído de cara.

En la carrera hay 5 coches (figura 5, izquierda) numerados del 0 al 4. Al igual que en la 1.ª sesión, los alumnos reproducen en su cuaderno lo que ven en el tablero (figura 5, derecha arriba) y apuestan antes de comenzar la carrera por el coche que creen que va a ganarla. Tras la carrera se realiza un bingo análogo al del día anterior (figura 5, derecha abajo).

4.ª y 5.ª sesión: Analizamos la experiencia y nos aproximamos a asignar probabilidades a sucesos

Estas sesiones se dedican a formalizar algunos de los conceptos aparecidos en los juegos. Para ellos se proporcionan al alumnado diagramas de árbol dirigidos e «incompletos» para que rellenen y luego poner en común (figura 6).

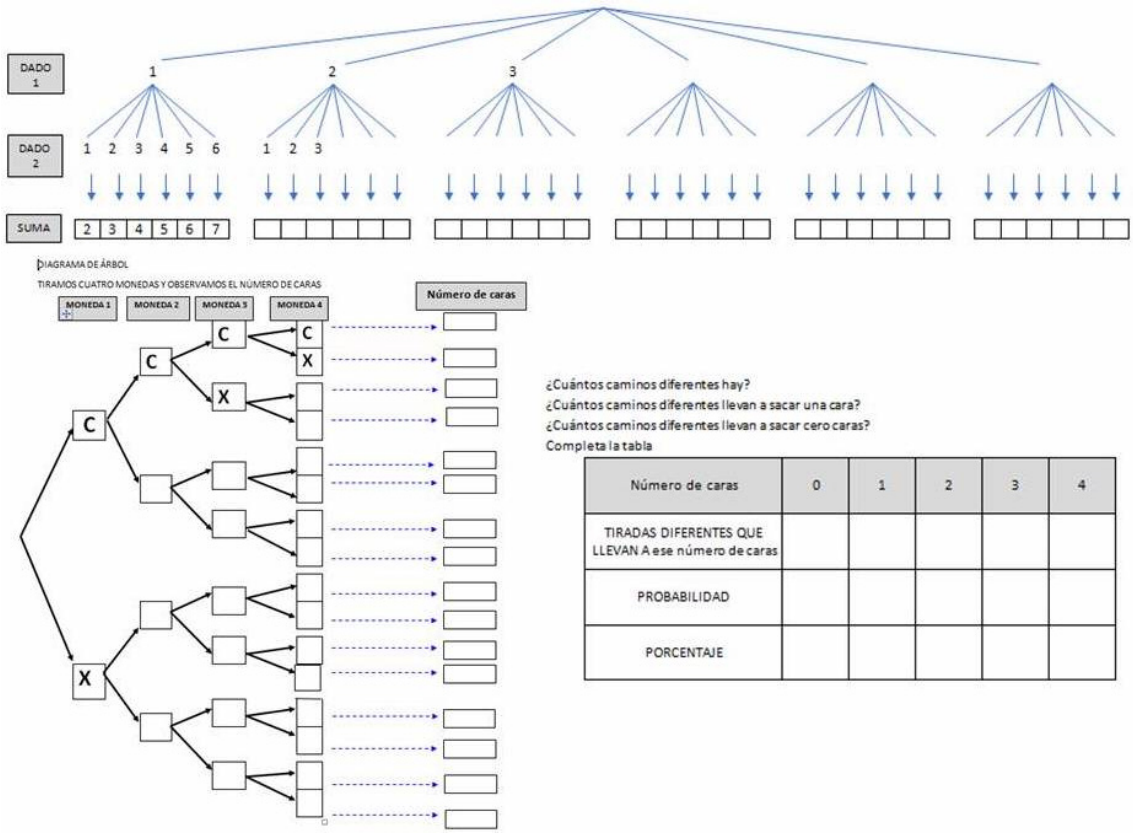


Figura 6. Ficha con los diagramas de árbol asociados a los experimentos

El diagrama de árbol es una herramienta de gran utilidad que permite obtener mucha información de una situación compleja a «simple vista». Esa información está organizada, lo que, en el campo de la probabilidad y conteo de casos, nos permite tener todo el abanico de posibilidades del experimento delante y cuantificar lo que ha sucedido en el juego. De la lectura del árbol y el conteo y recordando lo trabajado con fracciones y con razones, se instruye al alumnado en la asignación de probabilidades.

Conclusiones

En cuatro sesiones se trabajaron conceptos que se desarrollan usualmente como la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas, distinción entre suceso seguro, imposible y probable. Pero, además, con esta actividad, los alumnos se han acercado a nociones más profundas del estudio de la incertidumbre, por ejemplo:

— Se trabaja el concepto de variabilidad aleatoria. Muchos de los alumnos acercan sus predicciones, sobre todo en los juegos de BEANO, a los patrones observados mediante la experiencia y confirmados posteriormente con el recuento de casos favorables mediante los diagramas de árbol. Pero también han tenido la posibilidad de ver que no siempre se ajustan a ese patrón cuando el número de tiradas es bajo. Caras de sorpresa cuando veían que en muchos grupos ganaba el caballo número 7, pero en su grupo el 7 casi ni se había movido. En este sentido también se trabaja lo que se conoce como «la falacia del jugador», es decir, creer que la secuencia previa influirá en las siguientes repeticiones.
— La no equiprobabilidad, cuando en 1.º ESO en general en los libros de texto, tienden a aparecer problemas solo de situaciones equiprobables que se resuelven mediante la regla de Laplace, lo que les conduce luego en cursos superiores a decir sin pensar demasiado que la probabilidad de obtener un 2 en la suma de las probabilidades de dos dados es 1/11.
— Acercamiento al significado de probabilidad frecuencial (contando la frecuencia relativa de un suceso), y también al significado de distribución de probabilidad, lo que se hacía evidente especialmente en el segundo bingo, en el que las «apuestas» en la mayoría del alumnado ya reproducían la de una Binomial (4, 1/2).
— Recogida de datos de forma organizada en una situación ya para ellos «compleja» desde el punto de vista de todas las opciones que tenían que barajar. De hecho, cuando con estos mismos grupos de alumnos se realizó en 2.º ESO un trabajo de estadística descriptiva con datos recogidos en Educación Física, fue bastante natural y sencillo que organizaran la información.
— Favorecer el sentido estocástico y estadístico del alumno; ya que con la parte de bingo de la actividad, de alguna manera se provoca en el alumno una reflexión acerca de lo que ha visto, para ver si tras lo analizado cambiaría su apuesta, lo que contribuye a iniciarlos en una formación con mayor criterio, de proporcionarles cierta cultura probabilística y que estén menos expuestos ante situaciones en las que probabilidad y estadística son manipuladas de forma conveniente a quien propicia un juego o a quien pretende vender una información «engañosa».
— Y también hemos ido ya abonando el terreno para trabajar experimentos compuestos, que normalmente no se trabajan en este nivel.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Arce, M., L. Conejo y J. M. Muñoz-Escolano (2019), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, Síntesis, Madrid.
Begué, N., C. Batanero y M. Gea (2108), «Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria», *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 63–79.
Díaz, J., C. Batanero, y M. J. Cañizares (1996), *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid.
Fischbein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrech.
Martínez-Juste, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. En Libro de actas de CIMIE19: AMIE. Lleida: AMIE.
Martínez-Juste, S., y A. Domenech (2019), «Lesson Study para innovar en matemáticas», *Entorno abierto*, 30, 7–10.
Roldan, A. F., C. Batanero, y P. Beltrán-Pellicer (2018), «El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en probabilidad y combinatoria», *Épsilon*, 100, 49-63.
Shaughnessy, J. M. (1992), «Research in probability and statistics: Reflections and directions», en D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics education*, MacMillan.
Vickery, N. (2012), «BEANO (Probability with bean)s» [entrada de blog], *Walking in Mathland*, disponible en: <http://walkinginmathland.weebly.com/teaching-math-blog/beano-probability-with-beans>.

María Andresa Casamayor de la Coma (1720-1780)

por
Begoña Carrera Blecua
(CEIP El Parque, Huesca)

María Andresa Casamayor de la Coma fue la primera mujer en escribir un texto de tema científico (Matemáticas) en español y cuya obra se conserva.
Presentamos el texto de la charla impartida a alumnos y alumnas de sexto de primaria del colegio El Parque de Huesca en diciembre de 2020. Tomándola como hilo conductor, comentamos las reacciones de los chavales y exponemos sus puntos clave que tocan distintas disciplinas:

— Explicar sus aportaciones a la aritmética con ejemplos de clase concretos.
— Exponer el contexto histórico en el que vivió.
— Dar a conocer y poner en valor a esta mujer, matemática y maestra de niñas, invisibilizada a lo largo de la historia.

La anécdota inicial

Un padre y su hijo viajan en un coche y tienen un accidente. El padre muere y al hijo lo llevan al hospital pues necesita una complicada operación de emergencia, por lo que llaman a una eminencia médica. Cuando esta entra en el quirófano dice: No puedo operarlo, es mi hijo.

¿Cómo se explica esto?

Al plantear en clase el reto, muchos de los alumnos instintivamente levantaron la mano y dijeron: «¡Pero si se ha muerto!». Lo que dio motivo a la reflexión, pues en el momento inicial no se les ocurrió que la *eminencia médica* pudiera ser su madre, una mujer. Comentamos entonces los prejuicios instalados en nuestro inconsciente, donde los estereotipos de personas destacables los asociamos a varones y no a mujeres.

Utilizamos la anécdota para sensibilizar al alumnado sobre el sobresfuerzo que históricamente han debido realizar las mujeres para llegar a ser reconocidas y valoradas en ciencias, humanidades o las artes.

Se les comenta que existe un documental, *La mujer que soñaba con números,* de 2019 dirigido por Mireia Abrisqueta, en el que se cuenta la vida de María Andresa y el contexto en el que vivió y utilizamos varios cortes a lo largo de la charla. El documental fue el germen de una investigación para saber más de lo poco que hasta entonces se conocía (Bernués y Miana, 2019).

Su nombre

El principal dato conocido históricamente es el proporcionado por el historiador aragonés Félix Latassa quien en 1805, en su *Biblioteca de autores aragoneses*, presenta a María Andrea Casamayor y de la Coma como autora de dos libros de aritmética.

Curiosamente, en este curso hemos encontrado y comentado en clase algunos errores de impresión presentes en las nuevas ediciones de los libros de texto. Que un libro pueda tener erratas les llama la atención. Así que no les resultó demasiado extraño que en el apunte de Latassa apareciera el nombre de María Andresa con la falta de una *s*. Pero ha hecho que durante más de 200 años nuestra protagonista fuera conocida como Andrea. El documental todavía habla de ella como Andrea, si bien los subtítulos la nombran correctamente Andresa.

El anagrama

Para que su obra pudiera ser publicada, hubo de firmarla con seudónimo de varón y lo hace bajo el nombre de Casandro Mamés de Lamarca y Araioa. Este es un indicativo relevante del estatus de la mujer en la época.

En una muestra de su ingenio, dicho nombre resulta ser un anagrama, mismas letras en distinto orden, de su verdadero nombre. En la charla vimos cómo las letras se transforman de un nombre femenino a otro masculino. Aprovechando la sorpresa que les produjo nos dedicamos, como actividad complementaria, a transformar nuestros propios nombres, bien leyéndolos de derecha a izquierda o bien en otro orden buscando sonoridad. También les inicié el cuento de *Tacirupeca Jarro* (Caperucia Roja).

El contexto histórico

Nos encontramos en el inicio de la dinastía borbónica en España. Durante el curso, en las clases de Ciencias Sociales, hemos confeccionado diversas pirámides de población según la posición social. En la charla hacemos una breve referencia a las mismas para centrarnos en los comerciantes. En aquella época, el comercio de telas, metales preciosos, etc… en Aragón, estaba en manos de franceses. Una norma que ya venía del último de los Austrias, Carlos II, prohibía comerciar a franceses «salvo que estuvieran casados con españolas».

La familia de María Andresa

Los datos personales y familiares, además de presentar al personaje, crea un ambiente de empatía. Es casi inevitable una cierta identificación la con María Andresa niña. Su padre, Juan Joseph, fue un rico comerciante de telas francés que llegó a Zaragoza, a casar con la joven zaragozana Juana Rosa de la Coma. Producto del matrimonio fueron nueve hijos e hijas de los cuales María Andresa es la séptima. Varios de sus hermanos murieron de niños. En esa época, la mortalidad infantil era muy alta (hay que contar que no existían vacunas o antibióticos), un dato que llamó enormemente la atención en clase.

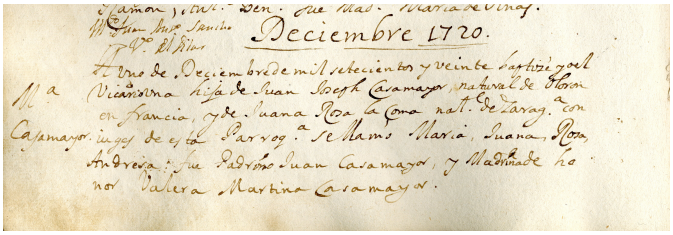

Deciembre 1720.

Figura 1. Apunte del bautismo de María Andresa Casamayor de la Coma

La educación de María Andresa

El analfabetismo de la población era lo habitual en la época. Tan solo las clases acomodadas podían proporcionar educación a sus hijos e hijas. En el caso de las niñas, su educación se limitaba a aprender las labores de la casa (coser…), saber rezar y tener una buena conducta moral. Y puesto que no podían ir solas por la calle, podrían recibir educación pero únicamente internas en un centro religioso o educadas en casa, bien por su madre, bien mediante algún maestro o maestra. En el caso de María Andresa esto último fue lo que ocurrió, pero además es que fue educada para saber leer, escribir, aritmética, latín… Algo muy distinto a lo que pasaba en su entorno.

Sus publicaciones

Escritas en 1738, cuando tenía 17 años, llevan por título *Tyrocinio Arithmetico*, cuyo único ejemplar que conocemos se conserva en la Biblioteca Nacional y *El Parasi solo*, un manuscrito sin publicar. El primero es un libro para enseñar las cuatro reglas (suma, resta, multiplicación y división) y, como nos dice la propia María Andresa en el documental, con una clara orientación al comercio. El segundo incluye tablas de raíces para ser utilizadas para la medida de campos.

Al comentar estas dos obras, presentamos ejemplos concretos para ser llevados a cabo en clase. Las reglas de proporcionalidad y el uso de raíces cuadradas en ejemplos geométricos, son las dos herramientas que fueron trabajadas.

Tyrocinio Arithmetico

En aquella época, cada región, incluso cada ciudad, tenía sus propias unidades de moneda, pesos, longitudes, volumen… Eso hacía que los cambios de unidades supusieran un verdadero quebradero de cabeza para los comerciantes. En el siglo XIX, la introducción del sistema métrico decimal que hoy usamos acabará por eliminar este problema. En la charla, vemos algunos ejemplos de las unidades que se manejaban en Aragón.

Figura 2. Portada del *Tyrocinio*

Ejemplo 1. En Huesca las unidades de moneda son libras y sueldos: 1 libra = 32 sueldos. En Zaragoza las unidades de moneda son libras y reales: 1 libra = 12 reales.

Si tengo en Huesca 3 libras y 24 sueldos, ¿qué me darán en Zaragoza?

Solución: Utilizamos la propocionalidad. Si 32 sueldos son 12 reales, ¿cuántos reales son 24 sueldos? La operación es $24 \times 12 / 32 = 9$ reales. Por tanto, al cambio en Zaragoza me darán 3 libras y 9 reales.

Ejemplo 2. Planteamos un mismo problema, primero con el sistema métrico decimal y después con unidades de la época.

Si 1 kilo de manzanas cuesta 1,4 euros y compro 1,3 kilos, ¿cuánto me costará?

Solución: $1{,}4 \times 1{,}3 = 1{,}82$ euros (1 euro y 82 céntimos).

Si el problema se enuncia con las unidades de la época, resulta más complicado. Sabiendo que la relación entre las libras y sueldos es que 1 libra = 32 sueldos, mientras que la relación entre arrobas y onzas es que 1 arroba = 12 onzas.

Si 1 arroba de manzanas cuesta 1 libra y 4 sueldos y compro 1 arroba y 3 onzas, ¿cúanto me costará?

La idea principal consiste en que antes de hacer la multiplicación hay que pasar las cantidades de manzanas y de monedas a una única unidad.

Primera solución: Pasar a la unidad más grande.
4 sueldos son $1 / 8$ de libra. Luego la arroba cuesta $(1 + 1 / 8)$ libras.
3 onzas son $1 / 4$ de una arroba. Luego compramos $(1 + 1 / 4)$ arrobas.
Por tanto hay que multiplicar $(1 + 1 / 8) \times (1 + 1 / 4) = 9/8 \times 5 / 4 = 45 / 32$ libras.
Haciendo la división, $45 / 32 = 1 + 13/32$. Es decir, el precio es de 1 libra y 13 sueldos.

Segunda solución: Pasar a la unidad más pequeña.
1 libra son 32 sueldos. Luego la arroba cuesta $32 + 4 = 36$ sueldos.
1 arroba son 12 onzas. Luego compramos $12 + 3 = 15$ onzas.
Utilizamos la proporcionalidad. Si 12 onzas (una arroba) cuestan 36 sueldos, tenemos que hallar cuánto cuestan 15 onzas. La operación es $36 \times 15 / 12 = 45$ sueldos. Haciendo, como antes, la división por 32 resulta 1 libra y 13 sueldos.

El Parasi solo

Actualmente utilizamos calculadoras para realizar operaciones. En aquella época, la herramienta eran las tablas, que publicaban para calcular con rapidez. Todavía hoy usamos una de esas tablas, la de multiplicar, que además de escribirla nos conviene memorizar. En este manuscrito, María Andresa escribe tablas de raíces cuadradas para aplicarlas a la agrimensura. Ponemos un ejemplo sencillo de su uso para medir campos.

Mi huerto es cuadrado y mide 25 metros cuadrados. He comprado el huerto de al lado, que mide 7 metros de largo. ¿Cuántos metros cuadrados mide ahora mi huerto?

Solución: El lado del cuadrado es la raíz cuadrada de 25, o sea 5 metros. Luego mi huerto mide ahora 5 metros de ancho y $5 + 7 = 12$ metros de largo. Por tanto, $5 \times 12 = 60$ metros cuadrados.

Maestra de niñas

Los ilustrados pusieron a la educación popular como centro de su política. Se crearán escuelas de primaria públicas y gratuitas en todos los pueblos de Aragón. El funcionamiento será todavía precario, pues la retribución de los maestros y maestras descansará con frecuencia en las aportaciones, principalmente en especie, de los alumnos. La frase «pasar más hambre que un maestro de escuela» es altamente descriptiva.

Poco después de publicar el *Tyrocinio*, todos los apoyos de juventud de María Andresa desaparecen. Su padre muere en 1738 y su amigo y colaborador Pedro Martínez en 1739. En 1740 su familia materna queda en la ruina. Sin embargo, a diferencia de lo que era habitual en la época, María Andresa no se casará ni entrará en la iglesia y vivirá de su trabajo. María Andresa fue maestra de niñas. Como parte de su retribución se le proporcionará una casa en la que vivir. La casa sigue todavía en pie en la calle Palomar del barrio de La Magdalena de Zaragoza.

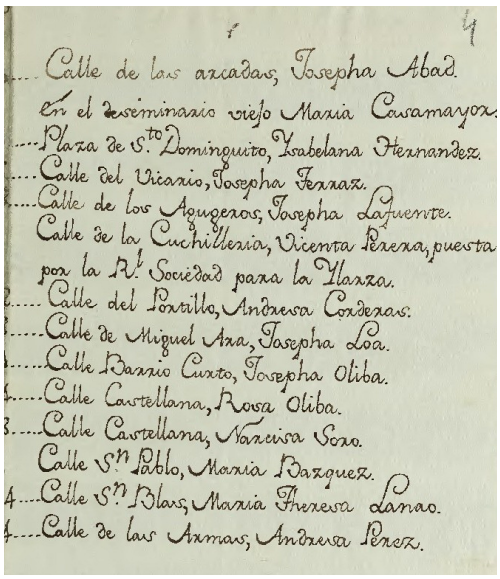

Calle de las azadas, Josepha Abad.
en el Seminario viejo Maria Casamayor.
Plaza de S.to Dominguito, Isabelana Hernandez.
Calle del Vicario, Josepha Ferraz.
Calle de los Agugeros, Josepha Lafuente.
Calle de la Cuchillería, Vicenta Perera, puesta
por la R.l Sociedad para la Plaza.
Calle del Portillo, Andresa Cordexas.
Calle de Miguel Aza, Josepha Loa.
Calle Barrio Curto, Josepha Oliba.
Calle Castellana, Rosa Oliba.
Calle Castellana, Narcisa Soro.
Calle S.n Pablo, Maria Barquez.
Calle S.n Blas, Maria Theresa Lanao.
Calle de las Armas, Andresa Perez.

Figura 3. El apunte como maestra de niñas en el Seminario viejo

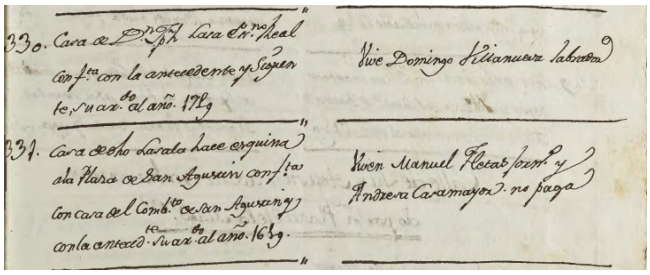

330. Casa de D.n Ph. Lara en.no real
con.ta con la antecedente y siguen
te, su av.to al año. 1769
Vive Domingo Villanueva labrador
331. Casa de dho Lara lace esquina
de la Plaza de San Agustin con.ta
con casa del Comb.to de San Agustin y
con la anteced.te su av.to al año. 1769.
Vive Manuel Flotas jorn.l y
Andresa Casamayor no paga

Figura 4. Apunte en el censo de 1766

Figura 5. Foto de su casa en la actualidad

Reedición del *Tyrocinio*

Para conmemorar el 300 aniversario de su nacimiento el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y el Instituto Aragonés de la Mujer han reeditado el *Tyrocinio Arithmetico*, con la participación de diferentes autores que explican su figura, su obra y el contexto histórico en el que se desarrolló.

Referencias bibliográficas

Bernués, J., y P. J. Miana (2019), «María Andresa Casamayor de la Coma (1720-1780)», *Suma*, 91, 81-86.
Presentación multimedia de la charla-taller, descargada de <https://museodematematicas.unizar.es/docs/casamayor2020.ppt>.

Dos rombos y un destino
(Penrose lo sabía)

por

Ricardo Alonso Liarte y Daniel Sierra Ruiz

(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo; CPI El Espartidero, Zaragoza)

El presente artículo es la segunda parte del que publicamos en el número anterior de *Entorno Abierto* (Alonso y Sierra, 2021). Allí decíamos que partíamos de un taller del MMACA al que asistimos en las JAEM de Cartagena, que ellos titularon *¡Si Penrose lo supiera…!* (Brasó y otros, 2013). Creemos que el título hace referencia al *jugo* que le sacaron a los dos rombos y que no se encontraba en el trabajo original (Penrose, 1979). Así que hemos aprovechado la *idea* para nuestro subtítulo, porque en esta ocasión nos vamos a centrar más en los contenidos desarrollados por Penrose.

El hecho de que los rombos estén tan relacionados entre sí, incita a pensar que su *generación* ha de tener algo especial. Si se observa la figura 1, rápidamente se ve *de dónde salen* y el porqué de las igualdades de lados y de las relaciones entre los ángulos. Al *venir* de un pentágono, lógicamente, entra en juego la proporción áurea (figura 2). Quizás en algunos momentos desde las matemáticas se ha dado demasiada importancia a esta proporción. Sea como fuere, es cierto que se puede encontrar en innumerables diseños de todo tipo y de toda época. Además, en este caso, nos ofrece la posibilidad de trabajar con el número en su forma radical, siempre y cuando lo contextualicemos. Dar el número en decimal como resultado final está bien, pero podemos convencer al alumnado que en los cálculos intermedios es conveniente trabajar con la *versión* radical (con calculadora, claro) si no queremos perder exactitud.

Un ejemplo rápido. En una joyería de Zaragoza *descubrimos* los pendientes y el broche de la figura 3. Si planteamos en el aula el problema de calcular los costes de fabricar en serie estos complementos, vamos a tener que calcular volúmenes y áreas de una forma lo más exacta posible, pues arrastrar un error significativo se traducirá en una diferencia importante de euros en el presupuesto final.

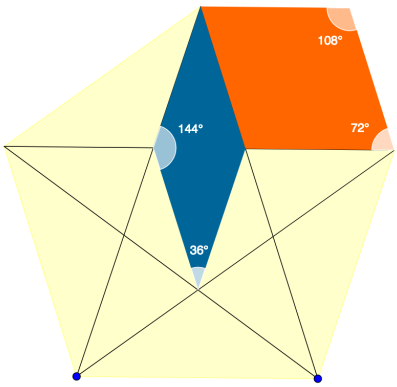


Figura 1

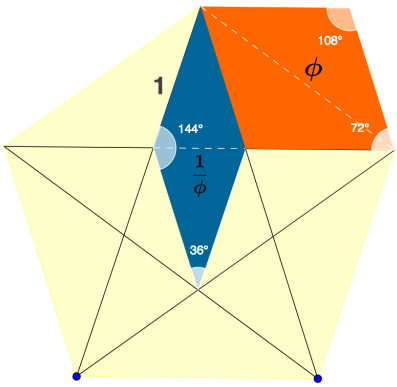


Figura 2

Figura 3

Ya adelantamos en la primera parte que en esta compararíamos las áreas de ambos rombos. La relación entre ellas es la proporción áurea. Esto nos abre dos opciones de ataque. Por una parte, los datos que aparecen en la figura 2 nos dan la posibilidad de hacer los cálculos de manera *exacta.* Por otra, el material manipulable nos permite medir directamente las piezas y hacer la división con decimales (con calculadora, claro). Como es lógico en este segundo cálculo no nos va a salir la proporción exacta. Dependerá del nivel del alumnado y los conceptos que queramos trabajar, para que nos inclinemos por una opción u otra. En todo caso, no son incompatibles y, en cursos *altos,* será conveniente *comprobar* que si manipulativamente lo hacemos muchas veces y calculamos su media, esta se acercará al valor *real.*

Vale, muy bien, ya sabemos algunas cosas de estos rombos, pero…, ¿qué interés podía tener Penrose en estos rombos? O bien, ¿qué andaba buscando para dar con ellos?

Vamos a contar una muy breve historia.

En un mosaico aperiódico no podemos encontrar una región fundamental que embaldose el plano por traslación. Por ejemplo, los hexágonos solo teselan de manera periódica, pero los triángulos pueden hacerlo periódica o aperiódicamente (figura 4) (Gardner, 1977).

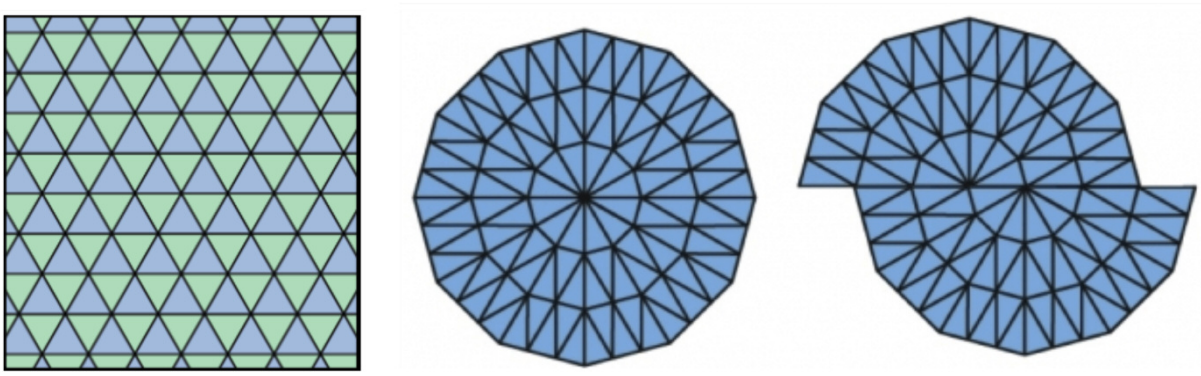


Figura 4

Los rombos de Penrose se enmarcan en la búsqueda que se emprendió en los años sesenta y setenta del siglo pasado, que consistía en encontrar una serie de losetas que solo teselaran el plano aperiódicamente. En 1961, Hao Wang quiso hallar un procedimiento que le permitiera decidir si un conjunto determinado de losetas, cuyas aristas estuvieran pintadas previamente, podría embaldosar el plano colocando juntas las aristas del mismo color. Si dicho procedimiento de decisión existiera, un conjunto de losetas, en esas condiciones, que embaldosara el plano aperiódicamente también lo haría periódicamente.

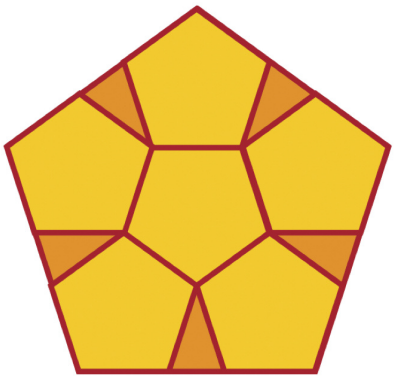


Figura 5

Pero, en 1964, Robert Berger demostró que la conjetura era falsa, aunque para ello se tuvo que apoyar en 20426 losetas. Posteriormente, él mismo redujo este número a 108. Tras varios intentos de seguir rebajando la cantidad de losetas, en 1976, Raphael M. Robinson lo dejó en seis. Y llegamos a Penrose.

Penrose partió de un pentágono que subdividió en otros seis pentágonos como se ve en la figura 5. Lógicamente, entre los pentágonos quedan unos triángulos isósceles. Aplicando la misma subdivisión a los seis pentágonos resultantes dos veces seguidas, observó que se generaban seis piezas que teselaban el plano de forma aperiódica. Siguió dándole más vueltas y con ayuda de algunos amigos matemáticos (por ejemplo, Conway), culminó el trabajo obteniendo sus muy conocidas hoy en día, cometa y dardo (figura 6). De aquí a los rombos el paso es sencillo, cuando te lo enseñan, claro (figura 7).

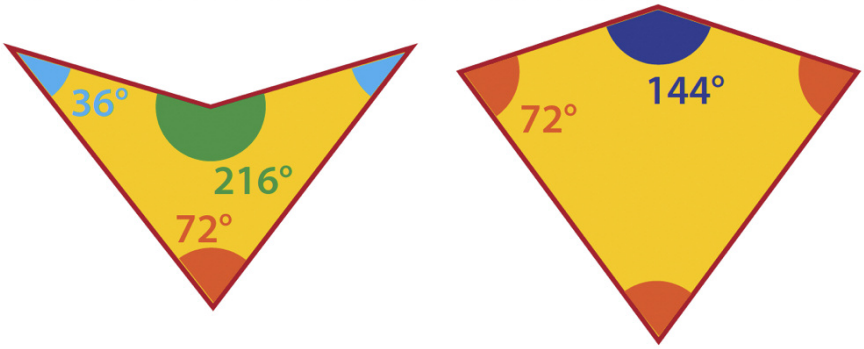


Figura 6

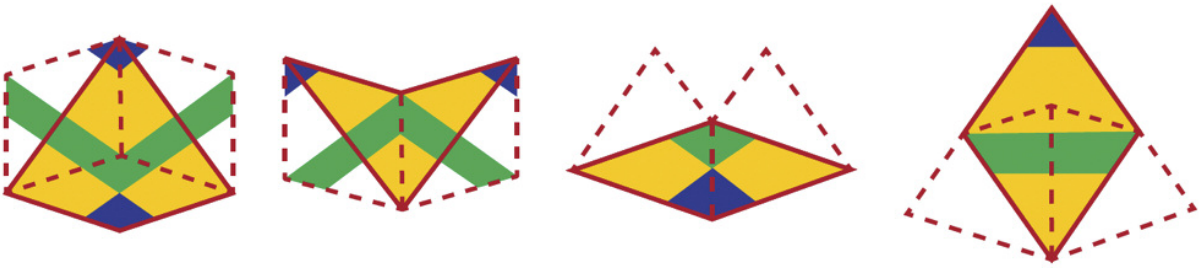


Figura 7

Evidentemente los rombos no teselan el plano aperiódicamente porque sí. Recordemos que Wang hablaba de establecer unas reglas, *pintando* las aristas. En la figura 7 aparecen los rombos pintados de tal forma que si hacemos coincidir los colores iguales cuando juntemos los rombos, lo que se obtiene obligatoriamente es un teselado aperiódico.

Los rombos se prestan a utilizarse comercialmente, como hemos visto un uso de los rombos en unos pendientes y un broche (figura 3). Así mismo, en las figuras 8, 9 y 10 aparecen otros lugares en los que se ha usado. Por eso, hasta que no tuvo atado el tema de las patentes Penrose no publicó sus resultados. Él había reducido ya en 1973 el número de piezas a seis, pero

Figura 8. Storey Hall, es parte del RMIT City campus of the Royal Melbourne Institute of Technology (RMIT University), en Melbourne (Asustralia)

se conoció antes el resultado de Robinson; incluso la reducción a dos data de 1974.

Tras realizar un breve recorrido por la historia de estas losetas, dejamos a los alumnos jugar con los dos rombos. Les proponemos que diseñen un mosaico que llene su pupitre con la condición de que sea aperiódico. Conviene recordar que aperiódico no significa que no deba seguir cierta pauta. El entusiasmo en la respuesta, como cabía esperar, es inversamente proporcional a la edad del alumnado, siendo los más pequeños los que con más afán quieren rellenar por completo el pupitre.

Con esto damos por cerrada esta segunda parte. En el próximo número de Entorno Abierto presentaremos la tercera y última entrega, donde haremos más hincapié en actividades con los rombos de Penrose (figuras 11 y 12).

Figura 9. Vista del pavimento de mármol «blanco Macael» de la Iglesia de Santa María, en Mahón

Figura 10. Stepney Green Underground Station2, Londres

Figura 11

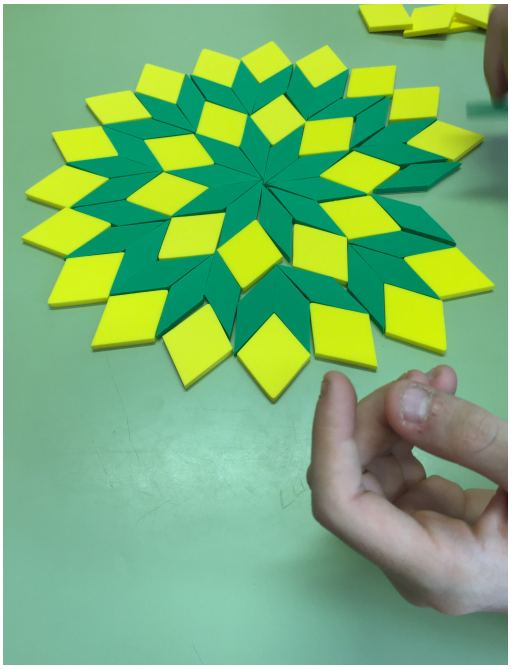


Figura 12

Referencias bibliográficas

Alonso, R., y D. Sierra (2020): «Dos rombos y un destino (jornada de Reflexión)», Entorno Abierto, n.º 38, 7-10.

Brasó, E., P. Fornals, G. Ramellini y Q. Tarradas (2013), «¡Si Penrose lo supiera…!», Actas de las XV JAEM, Cartagena.

Gardner, M. (1977), «Los embaldosados de Penrose», Investigación y Ciencia, n.º 6.

Penrose, R. (1979/80), «Pentaplexity. A Class of Non-Periodic Tilings of the plane», Math. Intell., n.º 2, 32-37.

Matemáticas en verso. Dos libros del siglo XIX

por
ANTONIO M. OLLER MARCÉN
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Hace unos meses, en el número 37 de *Entorno Abierto*, nuestra compañera Esther García se preguntaba si se pueden expresar sentimientos mediante las matemáticas. A modo de respuesta, se presentaban allí dos bellos poemas que introducían de forma natural conceptos matemáticos como medio para transmitir ideas y sentimientos no relacionados con las matemáticas. Así, puede surgir la pregunta inversa de si es posible usar la poesía como medio para transmitir ideas matemáticas.

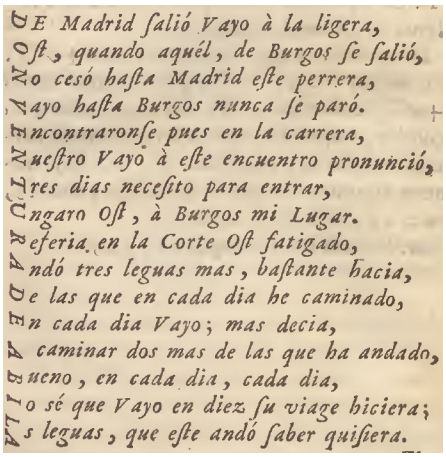
Podemos recordar, por ejemplo, el soneto que Rafael Alberti dedicó al número áureo en su libro *A la pintura. Poema del color y la línea* (1945-1948). El primer cuarteto dice así:

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

Sin embargo, pese a que a lo largo de los catorce versos aparecen diversos conceptos matemáticos (cuadratura, dodecaedro, esfera, compás, etc.) el poema no tiene una finalidad didáctica. Es un ejercicio estético inspirado en un concepto matemático.

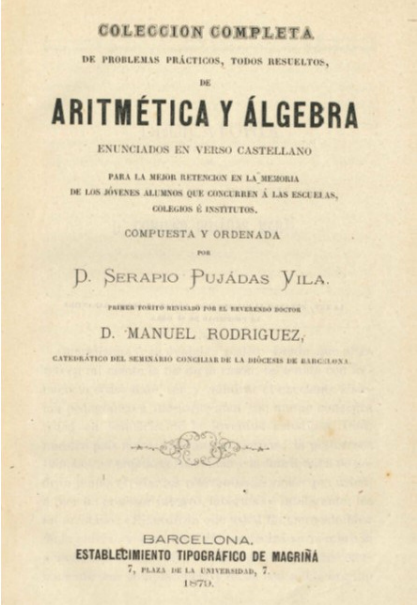
Cabría pensar que el discurso matemático es inevitablemente rígido y árido y que el estilo debe ser el de una prosa expositiva y argumentativa. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto. Textos antiguos, como el *Lilavati* indio (del siglo XII), fueron escritos en verso. El fin último probablemente fuera favorecer la memorización de las reglas que se presentaban, pero es difícil creer que no existieran motivaciones estéticas adicionales. En épocas más recientes, se han escrito obras dedicadas a la enseñanza de las matemáticas en forma de diálogo (relativamente común durante los siglos XVIII y XIX) y hasta siguiendo un formato epistolar.

Volviendo a la poesía no resulta del todo extraño encontrar autores que insertaban en su obra algunos problemas escritos en verso, a modo de divertimento. Tal es el caso de Ventura de Ávila, quien en sus *Elementos de Algebra* (escritos, por cierto, en forma de diálogo) incluye varios problemas versificados. Alguno, como el que mostramos en la figura, incluso formando un acróstico con su nombre.


DE Madrid ſalió Vayo à la ligera,
Oſt, quando aquél, de Burgos ſe ſalió,
No cesó haſta Madrid eſte perrera,
Vayo haſta Burgos nunca ſe paró.
Encontraronſe pues en la carrera,
Nueſtro Vayo à eſte encuentro pronunció,
Tres dias neceſito para entrar,
Ungaro Oſt, à Burgos mi Lugar.
Referia en la Corte Oſt fatigado,
Andó tres leguas mas, baſtante hacia,
De las que en cada dia he caminado,
En cada dia Vayo; mas decia,
A caminar dos mas de las que ha andado,
Bueno, en cada dia, cada dia,
Yo sé que Vayo en diez ſu viage hiciera;
Ils leguas, que eſte andó ſaber quiſiera.

Mucho menos usual resulta encontrar libros en los que se aborden sistemáticamente contenidos matemáticos escolares en verso. De hecho solo conocemos dos casos publicados en español, que son los que vamos a presentar brevemente aquí.

ELEMENTOS GENERALES
DE
ARITMÉTICA,
EN VERSO CASTELLANO,
Para la mejor inteligencia de los jóvenes alumnos que concurren á la Escuela pública
DE VINAROZ.
Por Don Leon Moles,
Maestro de primeras Letras por S. M., y Profesor en la misma por la Direccion general de Instruccion pública.
VALENCIA:
IMPRENTA DE CABRERIZO.
1837.


COLECCION COMPLETA
DE PROBLEMAS PRÁCTICOS, TODOS RESUELTOS,
DE
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
ENUNCIADOS EN VERSO CASTELLANO
PARA LA MEJOR RETENCION EN LA MEMORIA
DE LOS JÓVENES ALUMNOS QUE CONCURREN Á LAS ESCUELAS,
COLEGIOS É INSTITUTOS.
COMPUESTA Y ORDENADA
POR
D. SERAPIO PUJÁDAS VILA.
PRIMER TOMITO REVISADO POR EL REVERENDO DOCTOR
D. MANUEL RODRIGUEZ,
CATEDRÁTICO DEL SEMINARIO CONCILIAR DE LA DIÓCESIS DE BARCELONA.
BARCELONA.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE MAGRIÑÁ
7, PLAZA DE LA UNIVERSIDAD, 7.
1879.

Se trata, en primer lugar, de los *Elementos generales de Aritmética en verso castellano*, publicados en 1837 por León Molés y, en segundo lugar, de la *Colección completa de problemas prácticos, todos resueltos, de Aritmética y Álgebra enunciados en verso castellano*, publicada por Serapio Pujadas Vila en 1879. Esta segunda obra se reeditó, bastante aumentada, un año después.

A falta de hacer una investigación exhaustiva, no tenemos demasiada información sobre los autores más allá de la que ellos mismos proporcionan en sus obras. León Molés fue maestro de primeras letras en la escuela pública de Vinaroz, y publicó también una *Ortografía castellana en verso* que fue reeditada al menos cuatro veces antes de 1851. Por su parte, Serapio Pujadas Vila obtuvo el título de maestro de instrucción primaria superior en 1882 (después de publicar la obra que nos ocupa) y ejerció en la escuela pública de Vich. En 1883 publicó junto a Juan Nadal y Soler *El auxiliar del algebrista práctico*, una colección de problemas presentada en un formato más tradicional.

La obra de Pujadas Vila consiste, tal y como indica su título, en una colección de problemas de aritmética y álgebra. En un total de 132 páginas el autor presenta 272 problemas, todos ellos en verso. Los problemas planteados están agrupados según temas del modo que vemos en la tabla 1.

La reedición publicada al año siguiente incluyó un apéndice final con 59 problemas más sobre reglas de tres y sus diversas aplicaciones.

Tema	*Número de problemas*
Sumar números enteros	11
Restar números enteros	17
Multiplicar números enteros	15
Dividir números enteros	20
Sumar quebrados	8
Restar quebrados	6
Multiplicar quebrados	8
Dividir quebrados	6
Reglas de tres simples, directas e inversas	13
Reglas de tres compuestas	6
Reglas de seguros	2
Reglas de compañía, simples y compuestas	4
Reglas de interés y aligación	6
Falsa posición, simple y doble	7
Ecuaciones de primer grado con una incógnita	76
Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas	22
Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas	10
Ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas	3
Ecuaciones de segundo grado con una incógnita	16
Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas	3
Progresiones aritméticas	8
Progresiones geométricas	5

Tabla 1. Problemas dedicados a cada tema en la obra de Pujadas Vila

Los temas cubiertos en la obra son bastante usuales y se corresponden a grandes rasgos con la formación que, como maestro de primaria superior, recibiría el propio autor de la obra. Salvo unas contadas excepciones, solo se dan las soluciones numéricas de los problemas; cuya autoría aparece siempre referenciada. La mayor parte son originales del autor, pero algunos están extraídos de otras obras.

A modo de ejemplo, por alusiones regionales, presentamos el siguiente problema de restar quebrados, que da una idea del tono de la obra:

Un herrero aragonés
Tiene en su taller guardado
Muchísimo hierro colado,
Procedente de un inglés;
Son mil libras, que en Anglés
Venderá ocho a Sebastián,
Nueve once avos a Román,
Dos y un octavo a Liborio
Y tres quintos a Gregorio.
Di, ¿cuántas le sobrarán?

Entre los múltiples enunciados, podemos encontrar versiones versificadas de problemas clásicos, como el siguiente:

Mira ese estanque: de la sierra umbría
Tributo vanle a dar cuatro raudales;
Llenarle puede el uno en todo un día,
El otro necesita dos cabales,
El tercero hasta tres, y todavía
El último uno más, quedando iguales:
Si los cuatro a la vez libres corrieran,
¿Cuánto tiempo en llenarlo consumieran?

Si nos fijamos ahora en la obra de Molés, vemos dos diferencias fundamentales con la anterior. En primer lugar, los contenidos son de carácter más elemental. No se incluye álgebra y aparecen algunas fórmulas para el cálculo del área de triángulos y cuadriláteros. A este respecto se debe tener en cuenta que el autor era maestro de primeras letras, cuya formación no incluía contenidos algebraicos. No obstante, en esta obra aparecen los números decimales, el cálculo de raíces cuadradas y los logaritmos, que no se abordaban en la anterior. En la tabla 2 damos una idea de los contenidos abordados en el texto, con las páginas dedicadas a cada uno de ellos.

Tema	*Número de páginas*
Introducción	8
Sistema de numeración	2
Operaciones con enteros	12
Fracciones	8
Operaciones con fracciones	6
Números decimales	2
Operaciones con decimales	4
Razón y proporción	3
Regla de tres, directa, inversa y compuesta	5
Regla de compañías	4
Regla de interés y conjunta	2
Aligaciones	4
Falsa posición, simple y doble	5
Potencias y raíces	6
Progresiones y logaritmos	7
Área de figuras planas	3

Tabla 2. Páginas dedicadas a cada tema en la obra de Molés

En cualquier caso, la principal diferencia con respecto a la obra anterior radica en que este texto no es solo una colección de problemas, sino que incluye también explicaciones de conceptos y procedimientos. Por ejemplo, las fracciones se introducen del siguiente modo:

Esprésanse los quebrados
Con dos números marcando
Uno arriba y otro abajo,
Y una línea intermediando.
Numerador es llamado
Al de arriba o superior,
Y denominador es
El de abajo o inferior.
El de encima es dividendo,
El de abajo, divisor,
Y cuociente es el quebrado
Mismo representador.
Si el numerador es menos
Que su denominador,
Quebrado es propio, e impropio
Si le es igual o mayor.

Algo que comparten ambos textos es el intento de sus respectivos autores por aproximar la materia a sus estudiantes. El deseo de que el aprendizaje se les haga más llevadero. Molés, por ejemplo, añade como subtítulo del libro un texto revelador: «Para la mejor inteligencia de los jóvenes alumnos que concurren a la escuela pública». Pujadas Vila es mucho más explícito y dice en su prólogo: «la experiencia me ha mostrado con cuánto regocijo recibe el discípulo que se le presenten alguna que otra vez las cuestiones en verso. Su imaginación fatigada de tanta aridez como tiene el cálculo, descansa entonces, como el caminante que de trecho en trecho encuentra alguna potable y copiosa fuente en que mitigar su sed, o algún árbol frondoso en que guarecerse de los abrasadores rayos del sol».

Así pues los esfuerzos de estos dos maestros no parecen estar tan lejos de lo que se hace hoy en día cuando se utilizan en el aula videojuegos o fragmentos de películas para introducir, motivar o contextualizar contenidos curriculares. Las preocupaciones de los docentes son, en cierta medida, intemporales.

Pero volvamos al tema de la posibilidad de relacionar matemáticas y poesía, que ya parece indiscutible en ambas direcciones. Sobre esto, Weierstraß, en una carta dirigida a Sofia Kovalevskaya, escribió que «es cierto que un matemático que no es poeta nunca será un matemático perfecto». Podríamos discutir sobre qué quería decir el alemán con esas palabras, sobre el contexto en que se realizó dicha afirmación, o sobre que muy probablemente se trate de una exageración. Pero al leerlo no podemos evitar recordar la figura del persa Omar Khayyam quien, en el siglo XI, era capaz de escribir comentarios a los *Elementos* de Euclides, de descubrir métodos para resolver ecuaciones polinómicas de grado 3 usando secciones cónicas, y de escribir versos como los siguientes:

La esperanza del hombre se desvanece rápido
como el humo. Si se realiza es parecida
a los copos de la nieve que caen en las arenas
del desierto. Fulguran un instante y se funden

Intentemos, pues, desterrar esa falsa y nociva dicotomía entre las ciencias y las letras, la técnica y el arte. Si pretendemos separar y aislar las distintas piezas que conforman la cultura humana, estaremos irremediablemente condenados a romperla.

Criptografía para principiantes: Método Della Porta

por
Óscar Carrión Lostal
(IES Valdespartera)

Ya en anteriores artículos sobre criptografía para principiantes se vieron distintos métodos de cifrar y descifrar mensajes, como el de Julio César, el de Vinegère y el de la Escítala.

En este artículo vamos a tratar el método de Della Porta. Este método utiliza distintos alfabetos (filas de la tabla que veremos más adelante) y una palabra clave para cifrar y descifrar mensajes.

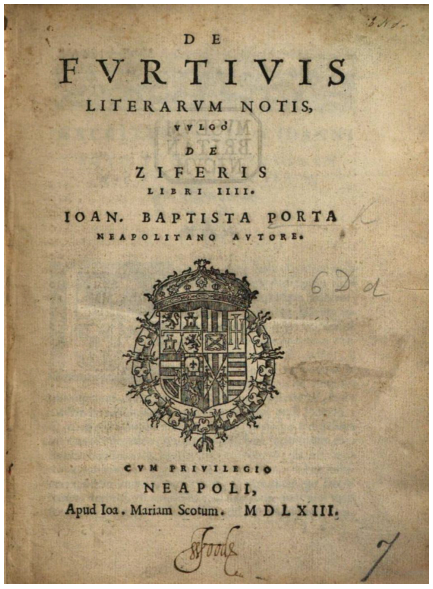
Para desarrollar dicho método en clase la propuesta didáctica es la siguiente:

— Introducción histórica.
— Cifrado y descifrado de mensajes con la tabla y la palabra clave correspondiente.

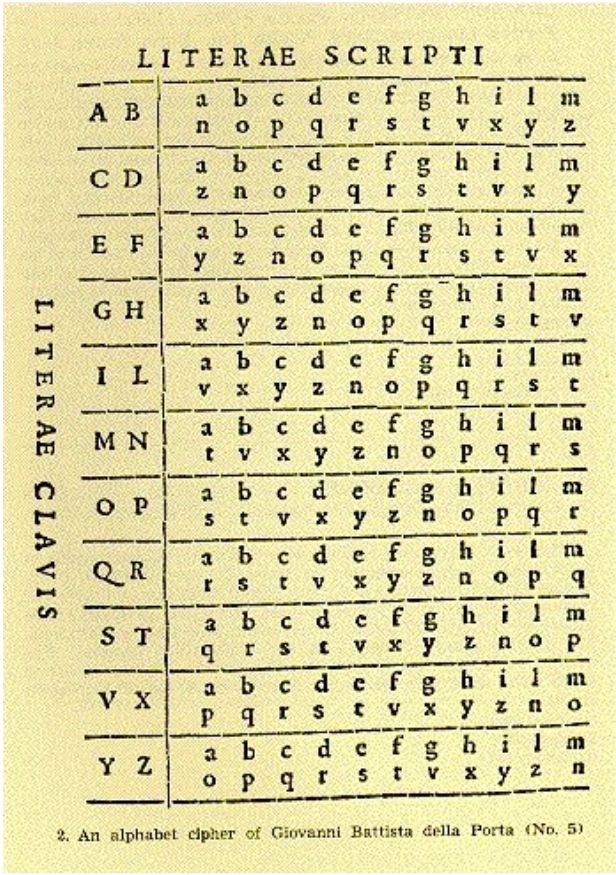
Della Porta

Este método lleva por nombre el de un famoso científico italiano, Giovanni Battista Della Porta (Vico Equense, 1535 – Nápoles, 1615),que además fue un filósofo, alquimista, comediógrafo de fines del siglo XVI y principios del XVII. Cuando tenía 28 años, en 1563, escribió el libro que le dio gran renombre como criptólogo: *De furtivis literarum notis-vulgo de ziferis*. Está compuesto por cuatro volúmenes que tratan, respectivamente, de cifras de la antigüedad, de cifras modernas, del criptoanálisis y de las características lingüísticas que facilitan el descifrado. La obra representa una recapitulación de los procedimientos clásicos de sus predecesores.

Della Porta clasifica los procedimientos en tres categorías: el cambio de la orden de las letras (transposición), de sus formas (sustitución por símbolos) y de su valor (sustitución por un alfabeto criptográfico). Estableció la división de los procedimientos, actualmente clásica, en dos principios: transposición y sustitución. Finalmente, fue el inventor del primer sistema literal de llave doble.


DE
FVRTIVIS
LITERARVM NOTIS,
VVLGO
DE
ZIFERIS
LIBRI IIII.
IOAN. BAPTISTA PORTA
NEAPOLITANO AVTORE.
CVM PRIVILEGIO
NEAPOLI,
Apud Ioa. Mariam Scotum. MDLXIII.

La tabla 1 es la original que usó Della Porta y que sale en el libro citado con anterioridad.



LITERAE SCRIPTI

LITERAE CLAVIS											
A B	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	n	o	p	q	r	s	t	v	x	y	z
C D	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	z	n	o	p	q	r	s	t	v	x	y
E F	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	y	z	n	o	p	q	r	s	t	v	x
G H	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	x	y	z	n	o	p	q	r	s	t	v
I L	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	v	x	y	z	n	o	p	q	r	s	t
M N	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	t	v	x	y	z	n	o	p	q	r	s
O P	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	s	t	v	x	y	z	n	o	p	q	r
Q R	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	r	s	t	v	x	y	z	n	o	p	q
S T	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	q	r	s	t	v	x	y	z	n	o	p
V X	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	p	q	r	s	t	v	x	y	z	n	o
Y Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m
	o	p	q	r	s	t	v	x	y	z	n

2. An alphabet cipher of Giovanni Battista della Porta (No. 5)

Tabla 1

A B	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
C Ch	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y
D E	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
F G	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w
H I	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v
J K	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u
L M	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s	t
N Ñ	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r	s
O P	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	s	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q	r
Q R	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	r	s	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p	q
S T	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o	p
U V	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ	o
W X	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	n	ñ
Y Z	a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	n

Tabla 2

Como se ha indicado, este método utiliza distintos alfabetos y una palabra clave. La tabla 2 es la que se debe utilizar. En ella se considera *Ch* como una letra para adaptarla al castellano (nótese que escribimos *Ch*, y no *CH*, ya que en caso contrario se podría confundir con la letra *H* que está incluida en la quinta fila de la tabla).

Préstese atención al hecho de que la tabla consta de catorce alfabetos (filas) cuando la original de Della Porta constaba de once alfabetos distintos.

Para su construcción hay que fijarse que cada alfabeto consta de dos letras que pueden formar parte de la palabra clave y de dos filas de letras que dan la correspondencia entre las del texto a cifrar y el cifrado. La primera fila de cada alfabeto es fija, y la segunda se va trasladando. Por ejemplo en el primer alfabeto (*A B*) la letra *a* está asociada a la letra *n*, sin embargo en el segundo alfabeto, la letra *a* está asociada a la letra *z*, que corresponde a trasladar la segunda fila un lugar hacia la derecha, y así sucesivamente.

Al cifrar un texto con este método se debe uno fijar en la palabra clave, (para el ejemplo supondremos que la palabra clave es CLAVE). Para la primera letra del texto a cifrar, nos debemos fijar en el alfabeto de la letra C, que es la segunda fila de la tabla derecha anterior, y sustituimos la letra del texto a cifrar por la letra que está encima o debajo de ese alfabeto, en nuestro caso la letra *m* hay que sustituirla por la letra *y*. Y así sucesivamente.

Veamos un ejemplo:

Texto a cifrar	m	a	t	e	m	a	t	i	c	a	s
Palabra clave	*C*	*L*	*A*	*V*	*E*	*C*	*L*	*A*	*V*	*E*	*C*
Texto cifrado	Y	U	G	U	X	Z	M	V	R	Y	G

Ejercicio 1. Cifrar el texto «taller de matemáticas», utilizando como palabras clave: a) PORTA y b) MATES.

a)

Texto a cifrar	t	a	l	l	e	r	d	e	m	a	t	e	m	a	t	i	c	a	s
Palabra clave	*P*	*O*	*R*	*T*	*A*	*P*	*O*	*R*	*T*	*A*	*P*	*O*	*R*	*T*	*A*	*P*	*O*	*R*	*T*
Texto cifrado																			

b)

Texto a cifrar	t	a	l	l	e	r	d	e	m	a	t	e	m	a	t	i	c	a	s
Palabra clave	*M*	*A*	*T*	*E*	*S*	*M*	*A*	*T*	*E*	*S*	*M*	*A*	*T*	*E*	*S*	*M*	*A*	*T*	*E*
Texto cifrado																			

En el siguiente ejemplo se procede al revés. Ahora hay que descifrar el mensaje que nos dan cifrado conocida la palabra clave (que en este caso es PORTA):

Texto cifrado	R	S	C	V	Z	S	B	N	S	N	A
Palabra clave	*P*	*O*	*R*	*T*	*A*	*P*	*O*	*R*	*T*	*A*	*P*
Mensaje	m	a	t	e	m	a	t	i	c	a	s

Ejercicio 2. Sabiendo que la palabra clave es CLAVE, descifrar los mensajes: a) «ÑKVAIChÑEPIUU», b) «QLGPOULGYNZ», y c) «DIBQYNRYZOZZ».

a)

Texto cifrado	Ñ	K	V	A	I	Ch	Ñ	E	P	I	U	U
Palabra clave	*C*	*L*	*A*	*V*	*E*	*C*	*L*	*A*	*V*	*E*	*C*	*L*
Mensaje												

b)

Texto cifrado	Q	L	G	P	O	U	L	G	Y	N	Z
Palabra clave											
Mensaje											

c)

Texto cifrado	D	I	B	Q	Y	N	R	Y	Z	O	Z	Z
Palabra clave												
Mensaje												

Ejercicio 3. Cifrar y descifrar diferentes mensajes entre vosotros por el método de Della Porta, donde uséis como palabra clave diferentes palabras clave.

Bibliografía

MÜLLER, D., P. BONAVOGLIA y J. SAVARD (s.f.), *Criptología, Giambattista Della Porta*, recuperado el 21 de marzo de 2021 de <https://web.archive.org/web/20091012192837/http://serdis.dis.ulpgc.es/~ii-cript/PAGINA%20WEB%20CLASICA/CRIPTPLOGIA/de%20la%20porta.htm>.

TÁBARA, J. L. (s. f.) *Breve historia de la Criptografía Clásica*, descargada de <http://www.openboxer.260mb.com/asignaturas/criptografia/metodosCriptograficos.pdf?i=2>.

— *Criptografía clásica*, Della Porta, consultada en <https://joseluistabaracarbajo.gitbooks.io/criptografia-clasica/content/Cripto10.html>.

Giovanni Battista della Porta (2020), en *Wikipedia*, recuperado el 21 de marzo de 2021 de <https://es.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Battista_della_Porta>.

Talleres de Conexión Matemática impartidos por el autor del presente artículo.

Con mucho arte

por
Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte
(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Los estímulos que lanza el entorno en el que se desarrollan hoy en día los niños y niñas tienen una fuerte componente visual. Televisión, videojuegos, todo tipo de publicidad… y sobre todo, los contenidos a que nos dan acceso los móviles. Estos estímulos influyen en ellos continuamente. Por eso, es importante que desde la escuela se aborde el análisis y la comprensión de la información que aportan las imágenes, al tiempo que, como contrapunto, se les introduce en el mundo de las obras artísticas globalmente reconocidas. Estas pueden constituir un fantástico punto de partida para desarrollar su propia creatividad, al tiempo que descubren a los distintos artistas a través de sus obras.

Loewenfeld y Lambert (1992) afirman que: «El dibujo, la pintura o la construcción constituyen un proceso complejo en el que el niño reúne diversos elementos de su experiencia para formar un todo con nuevo significado. En el proceso de seleccionar, interpretar y reformar esos elementos, el niño nos da algo más que un dibujo o una escultura». En esta labor de selección e interpretación de los elementos de una obra de arte, podemos trabajar las habilidades lógico-matemáticas a las que alude el currículo de la etapa de Infantil (identificación de atributos, seriaciones, clasificaciones, abstracciones de figuras geométricas…) al tiempo que ellos se impregnan del lenguaje plástico del artista que se está trabajando.

Entre los principios metodológicos que nos propone el currículo de Infantil, encontramos: «Los procesos de enseñanza y aprendizaje deben tender a un enfoque globalizador e integrador de las áreas del currículo [...]».

Es comprensible, pues, que se aborden conjuntamente distintas áreas, como Conocimiento del entorno (en la que estarían incardinados los contenidos relativos a Matemáticas) y Lenguajes: comunicación y representación (en la que se ubica el contenido Lenguaje Artístico).

Este enfoque globalizador es el que nos hemos planteado al desarrollar las actividades que presentamos aquí. Todas ellas tienen como punto común que parten de una obra de arte reconocida. Los contenidos matemáticos que se trabajan varían, así como el nivel al que van dirigidas.

Estas actividades se pueden abordar de manera individual o ser integradas en el desarrollo de una unidad didáctica como «Los Museos», que aparece en la programación de diversos centros, precisamente por la amplitud de contenidos que permite trabajar.

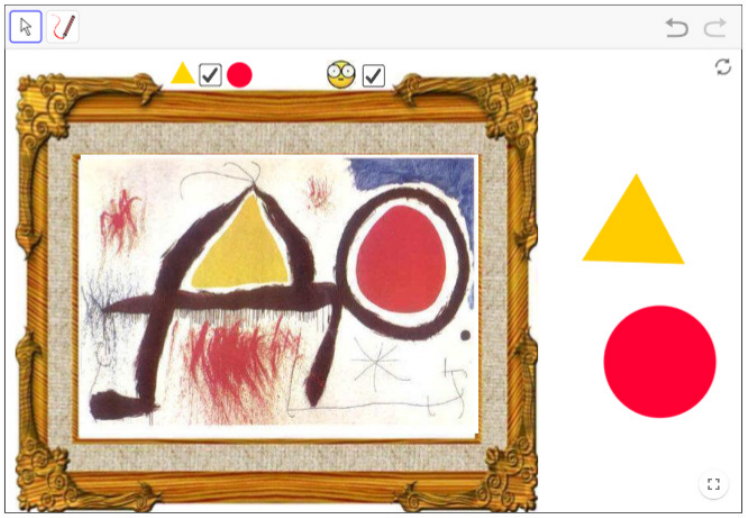
Todas ellas están disponibles en un único libro de GeoGebra: *Un entorno para Geogebrarte* <https://www.geogebra.org/m/h5numnzr> en el que se trabaja con los artistas Joan Miró, Vasili Kandinsky, Piet Mondrian, Salvador Victoria, Paul Klee, Vincent Van Gogh, Kazimir Malevich y Romero Britto.

Joan Miró (1893-1983)

Del pintor catalán se trabaja el cuadro *Personaje delante del sol* (1968), a través de cuatro actividades. Los contenidos matemáticos que aparecen son el triángulo y el círculo, como figuras geométricas básicas. La primera actividad, «Coloca», está pensada para los más pequeños. Permite poner las dos figuras sobre el cuadro, ocupando su lugar, y trazar las líneas negras del contorno del personaje con el lápiz. Una vez finalizado, el alumno puede hacer desaparecer el cuadro original, con lo que queda solamente su reproducción.

La segunda, «Elige», es similar a la anterior pero se aumenta la dificultad ofreciendo varias figuras de cada tipo, entre las cuales el alumno debe elegir la que se ajusta al tamaño del cuadro.

Por último, «Redimensiona en Miró», parte del planteamiento de las anteriores, pero en esta ocasión las figuras no tienen las dimensiones adecuadas para colocarse en el cuadro, y el alumno debe modificarlas para que encajen, lo que dificulta la tarea.

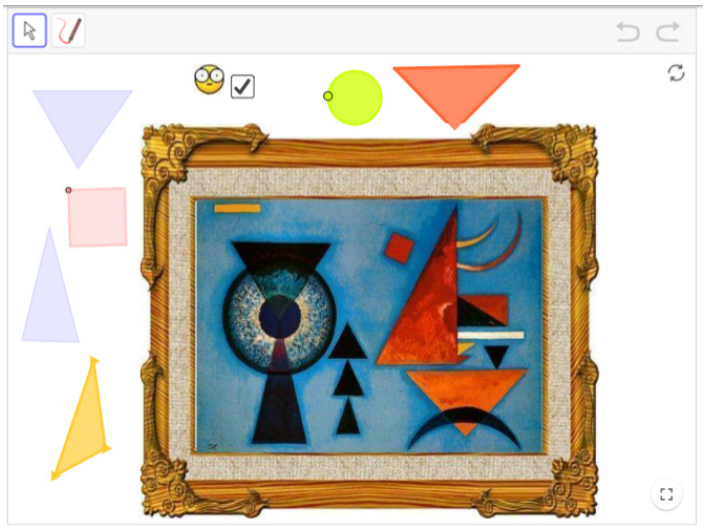


Vasili Kandinsky (1866 - 1944)

Las figuras geométricas que aparecen en el cuadro *Soft Hard* (1927) del pintor ruso han dado pie a la elaboración de tres actividades. En la primera, «¿Qué ves?», se buscan similitudes de las figuras que conforman el cuadro con objetos reales, más o menos cotidianos, de modo que se les invita a colocar cada objeto sobre la figura a la que se asemeja. Finalmente, se puede ocultar el cuadro original y queda a la vista el formado por las figuras que han colocado los alumnos.

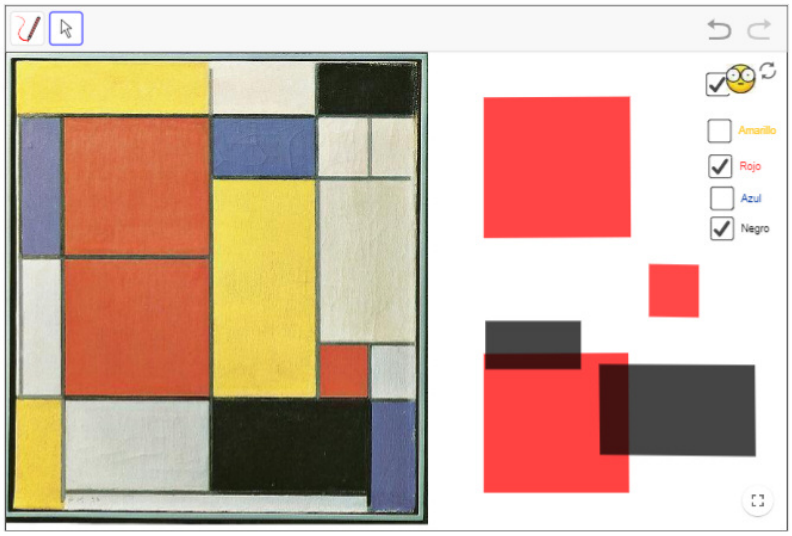
En la segunda, «Coloca las figuras Kandinsky», se ofrecen figuras geométricas que pueden encajar con las del cuadro. Algunas ya están dimensionadas y solo hay que arrastrarlas. Otras se deben redimensionar para que encajen. Como siempre, al final se puede ocultar el cuadro original.

En «Creación propia», se da rienda suelta a la creatividad del alumnado para que coloque las figuras que se le ofrecen a su propio criterio, dándoles el tamaño que considere oportuno. El resultado se puede complementar con trazos del lápiz. Esta propuesta es la más abierta de todas, de forma que el docente puede aprovecharla para hacer actividades de centración, decantación, clasificación o seriación, planteando las instrucciones oportunas a partir de las cualidades color, forma y tamaño. Se puede completar la actividad con una representación sobre papel de la creación hecha en la PDI.



Piet Mondrian (1872-1944)

Composición II (1920) es un cuadro de este autor holandés compuesto en su totalidad por cuadriláteros de colores básicos. Con él se han elaborado cuatro actividades que abordan diferentes habilidades.



La primera, «Coloca las figuras», es un sencillo puzle en el que podemos ver el cuadro completo. Fuera del mismo, podemos visualizar las piezas clasificadas por colores para que los alumnos las vayan colocando en su lugar, sobre la pintura. Esta actividad es adecuada para el alumnado más pequeño.

La segunda, «Puzle Mondrian», parte del mismo esquema que la anterior, pero ahora el cuadro original se ha reducido a los trazos que delimitan los cuadriláteros y tenemos disponibles todas las piezas a la vez. La actividad más sencilla consistiría simplemente en que completaran el puzle (en grupo o individualmente). Pero también se puede utilizar para trabajar las habilidades lógicas y las comunicativas si se plantea como un juego entre dos niños (o equipos) en el que uno explica verbalmente al otro cómo es la pieza que tiene que colocar y dónde debe ponerla. Se puede modular la dificultad a través de las preguntas que se permiten y las que no (por ejemplo, de respuesta sí/no).

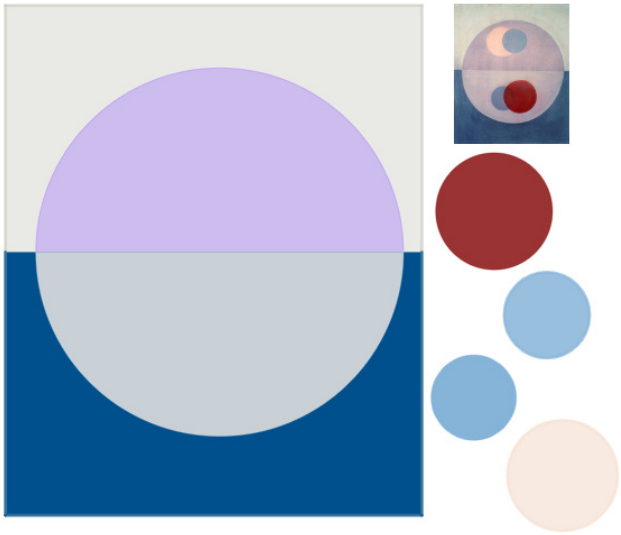
La tercera actividad muestra el cuadro completo a falta de tres piezas que ellos deben colocar. En esta ocasión, las figuras deben ser redimensionadas para que encajen en el cuadro, lo que añade dificultad.

Por último, la cuarta actividad propone la realización de conteos por colores y suma de figuras del mismo color, que se puede realizar con el apoyo del recuento.

Salvador Victoria (1928-1974)

El cuadro de este autor turolense que se ha elegido para elaborar las actividades, fue pintado en 1971. La obra (*Sin título*), formada fundamentalmente por círculos, se presta a trabajar, además de esta figura geométrica básica, los conceptos delante y detrás, relativos a la orientación espacial.

La primera propuesta, «Salvador Victoria-1», aparenta ser un sencillo puzle en el que hay que colocar los cuatro círculos sobre la estructura básica del cuadro. Sin embargo, al poner los azules, nos percataremos de que no son intercambiables, pues uno queda «delante» y el otro queda «detrás» del resto de las figuras, lo que supone una ocasión para trabajar estos conceptos espaciales.



La segunda actividad, «Salvador Victoria-2», propone un ejercicio de mayor abstracción, ya que se deben cambiar todos los círculos del cuadro por cuadriláteros, y viceversa, con lo que el aspecto de la obra cambia notablemente.

Por último, «Salvador Victoria-3» es una actividad de carácter más creativo. Los puntos que aparecen sobre los círculos permiten cambiar, tanto su tamaño como su color. Y la composición final de la obra es libre, aunque el docente puede determinar el resultado a través de las consignas oportunas.

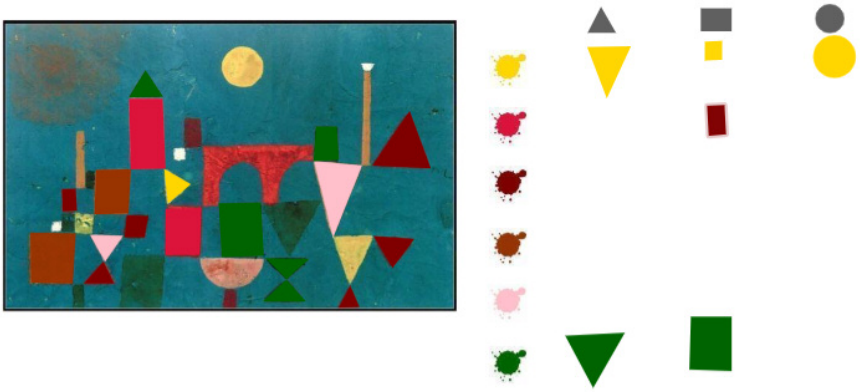
Paul Klee (1879-1940)

Las propuestas con este autor se basan en dos cuadros: *Rote Brucke* (1928) y *Farbtafel* (1930).

Con el primero se han desarrollado cuatro actividades que permiten trabajar contenidos lógicos como decantación y clasificación y el reconocimiento de figuras geométricas básicas.

La primera es un puzle del estilo de los ya comentados con el cuadro de Kandinsky. El docente puede elegir si trabaja solo con un tipo de forma (triángulos y/o cuadriláteros) eliminando así una cualidad en las piezas, quedando solamente el color. La segunda, de corte más creativo, permite que los niños hagan su propia composición con las piezas del cuadro.

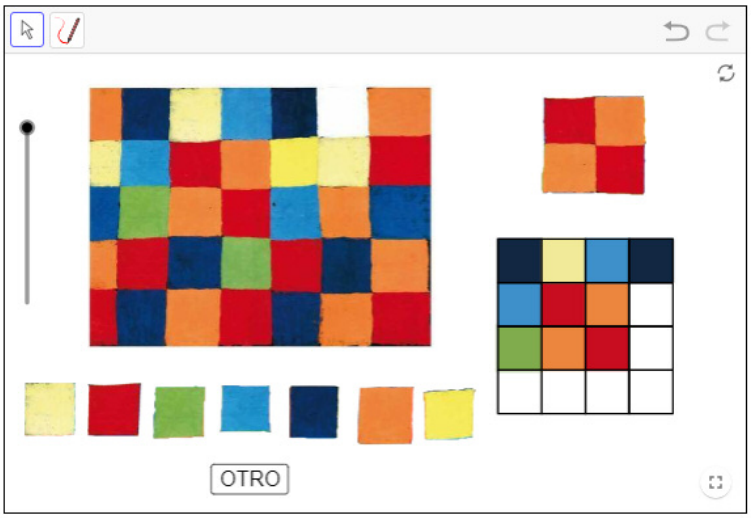
Tanto la tercera actividad como la cuarta, están orientadas al trabajo con habilidades lógicas. En concreto, una permite realizar una actividad de decantación con una o dos cualidades de las figuras (color y forma). Mediante los deslizadores, el docente elige los atributos que deben tener las piezas seleccionadas, que serán arrastradas al diagrama de la derecha. La cuarta actividad permite realizar una clasificación por dos cualidades (color y forma) distribuyendo las figuras en un diagrama de Lewis.



El segundo cuadro trabajado es *Farbtafel*, conformado por una cuadrícula de diferentes colores. Esta estructura nos ha dado pie a proponer un total de tres actividades que trabajan la atención y los movimientos en el plano.

La primera, «Farbtafel», muestra aleatoriamente un conjunto de cuatro cuadrados, junto al cuadro completo. Además, disponen de una cuadrícula en blanco y cuadrados de «pintura» para colorearla. El alumno reproducirá la composición de los cuatro cuadrados en la cuadrícula. Luego, la localizará en el cuadro y deberá pintar todos los cuadrados que hay a su alrededor, igual que en la obra. Para distinguirlos bien, puede cambiar la transparencia de la misma con el deslizador. Cuando haya terminado, pulsando en el botón «otro» se comienza de nuevo con otro fragmento.

En la segunda propuesta, «Completa Farbtafel», aparecen en blanco cinco cuadrados. Su ubicación cambia aleatoriamente al pulsar el botón «Otro». Los niños deben rellenar estos cuadrados con el color correspondiente. Para ello tienen a la vista una versión pequeña del cuadro original, y los colores para pintar. El alumnado deberá desarrollar estrategias para recordar la ubicación de los cuadrados en el cuadro original y reproducirla en el otro.

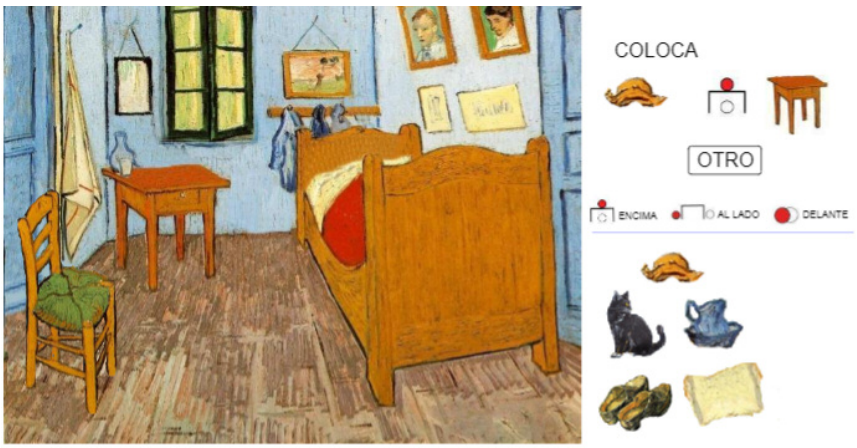


Por último, la tercera aplicación, «Cuenta con Farbtafel», propone que los alumnos hagan el conteo de los cuadros de cada color que aparecen en la obra. Para ello cuentan con la herramienta «lápiz» que les permitirá poner en práctica diversas técnicas

auxiliares de recuento, como marcar lo ya contado o dibujar caminos físicos para distinguir lo ya contado o lo que falta por contar. Finalmente, pueden escribir el cardinal obtenido en el recuadro preparado junto al color.

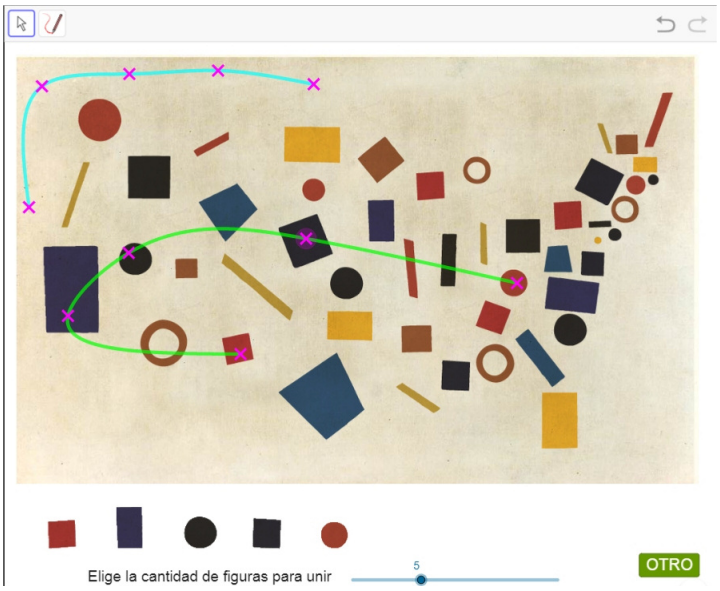
Vincent Van Gogh (1853-1890)

En esta ocasión utilizamos la obra *El dormitorio en Arlés* (1889) del pintor neerlandés, que muestra un pequeño espacio con muebles y objetos personales. Esto nos ha dado pie a trabajar el vocabulario de conceptos espaciales, en concreto «delante de», «al lado de» y «encima de». La aplicación muestra la pintura y un conjunto de objetos que se pueden poner sobre los componentes de la misma en las mencionadas posiciones. En la parte de arriba, unas instrucciones elaboradas con pictogramas de ARASAAC, indican al alumno qué objeto debe colocar, en qué posición y respecto a qué objeto del cuadro. El niño interpreta el mensaje y arrastra el objeto a la posición indicada. Apretando el botón «Otro», el objeto vuelve a su sitio y aparece otra indicación.



Kazimir Malevich (1878-1935)

Map style es una obra de este pintor ruso formada por multitud de figuras geométricas, claramente diferenciadas por formas, tamaños y colores. Por ello se brinda fácilmente a trabajar con ella habilidades lógicas. La propuesta que hacemos, «Caminos con Malevich», nos lleva a las seriaciones. Se presentan dos líneas que conectan entre 3 y 9 puntos. En la parte de abajo aparece la serie que tienen que reproducir con los mencionados puntos, localizando figuras en el cuadro iguales a las de la serie. El «camino» que une las figuras se maneja moviendo los puntos marcados con una x, y el número de figuras de la serie se determina con el deslizador. Pinchando el botón «Otro», la serie a reproducir cambia. La aplicación ofrece dos caminos diferentes para poder organizar la actividad comparando el trabajo de dos grupos o equipos. También podemos establecer restricciones que condicionen la respuesta dada, como la limitación de que la curva se corte consigo misma o con la otra, o la prohibición o imposición de que una misma figura forme parte de los dos caminos.



Además, la aplicación deja a disposición del alumnado la herramienta lápiz, que se puede emplear para realizar actividades de decantación y clasificación, marcando los elementos elegidos, o trazar un tercer camino, si es posible.

Romero Britto (1963-)

Este pintor brasileño es creador de obras con gran colorido y formas sencillas. Usándolas como bases de puzles, hemos elaborado un conjunto de tres aplicaciones que ya comentamos en el artículo «Rompecabezas», del n.º 33 de Entorno Abierto. Con ellas se pueden trabajar desde sencillos puzles a clasificaciones por dos criterios mediante diagramas de Lewis. Para verlos más en profundidad, proponemos consultar dicho número de la revista.

Esta pequeña colección de actividades sobre obras pictóricas es solo una muestra de lo que se podría trabajar con este tipo de materiales. La mezcla de arte y matemáticas, con las TIC como herramienta, puede dar como resultado unas actividades de gran poder motivador y formativo. La creatividad y la imaginación del alumnado nos llevarán a un resultado... con mucho arte.

Referencias bibliográficas

Loewenfeld, V., y W. Lambert (1992), *Desarrollo de la capacidad creadora,* Kapelusz, Buenos Aires.

ORDEN de 28 de marzo de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación infantil y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Marzo de 2021
ISSN: 2386-8821e

BY NC SA