Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 42
Septiembre de 2021

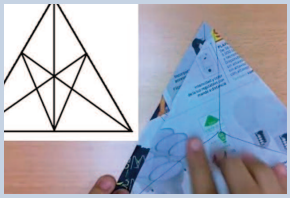
Σrio Interactivo

☛ Las matemáticas cambiaron mi vida

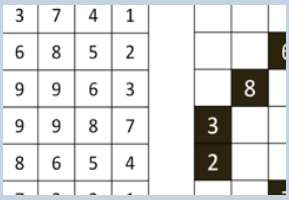
☛ Cómo determinar el valor de π con cosas buenas de comer y una balanza

☛ Estudio comparativo en resolución de problemas de cálculo mental entre Educación Infantil y Primaria

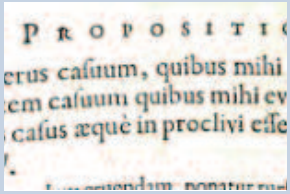
☛ La resolución de problemas, mucho más que un eslogan



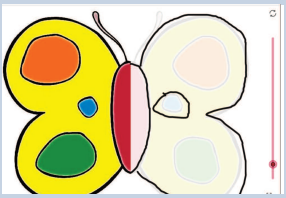
☛ Explorando el bloque 1: retos conjuntos



☛ Un problemita de probabilidad del siglo XVII



☛ La mirada en el espejo



únete a la SAPM

click

Las matemáticas cambiaron mi vida

por
María Delgado Álvarez

¿Alguna vez te has parado a pensar por qué algo surge? En el ámbito de encontrar quién eres, a qué te quieres dedicar y plantearte cuestiones sobre tu vida, tu futuro, juega un papel importante la motivación. Motivación es una palabra maravillosa, y está muy presente en nuestra sociedad; o al menos debería de estarlo. Yo la definiría como un estado que encuentra una persona para poder superar o conseguir su objetivo, pudiendo pasar por cualquier adversidad pues la meta es clara. Normalmente, cuando naces y cuando eres pequeño, no tienes claro qué quieres estudiar, puesto que en esa etapa tienes que disfrutar, divertirte y pasar tiempo con tus amigos y familia. Más tarde, está la etapa de la adolescencia, donde ya empiezas a saber por qué te decantas más, empiezas a conocerte a ti mismo, tus gustos e intereses. Todo esto es un proceso para encontrar tus pasiones, y tu futuro. Te lo contaré con mi ejemplo.

¡Hola! Me llamo María y soy una niña de 15 años, que su actividad favorita es aprender. Acabo de terminar cuarto de la ESO, y me han admitido en el Bachillerato Internacional Tecnológico. Puede sonar raro, pero así es; Me encanta estudiar matemáticas de nivel universitario, actualmente estoy con teoría de números algebraica y topología, y todo esto por mi cuenta. También me apasiona la física, en especial la física cuántica, la astrofísica y la física nuclear; incluso, la programación y tecnología entran en mi grupo de interés. Estos tres campos son los que definen mi vida, cualquier persona que me conozca sabe que soy una chica de ciencia y tecnología, y esto me encanta. Pero todo esto ha tenido que surgir de alguna manera, y aquí juega el papel de la motivación que os he explicado antes a grandes rasgos.

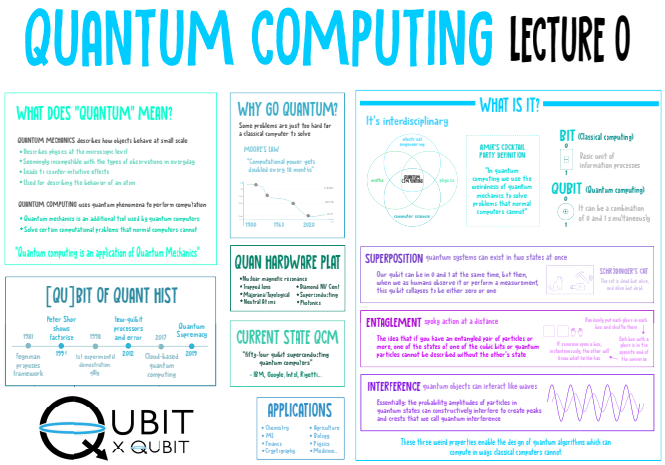
Cuando era pequeña, no tenía claro que quería estudiar; mis padres son ingenieros y supongo que la rama de matemáticas siempre ha sido uno de mis puntos fuertes, pero tuve épocas en las que quería ser escritora, cantante, actriz e incluso astronauta. Lo típico que nos pasa a todos, vamos descubriendo y entrando en diferentes entornos para ver en cuál nos acomodamos mejor. El caso es que en quinto de primaria, en mi colegio seleccionaron a unos pocos estudiantes para que una hora a la semana salieran a razonar problemas más orientados a lógica y abstracción. Me acuerdo que al principio lo veía como todo muy normal, porque me parecían muy fáciles, pero luego quise ver lo que había detrás de ellos, y me preguntaba cómo los «genios creadores» de esos problemas los habían hecho. Allí se despertó mi curiosidad, pero no del todo.

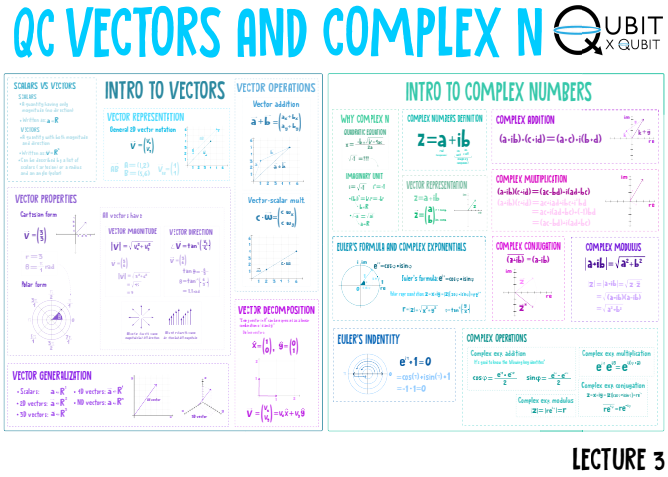
En 1.º de la ESO, fue un cambio muy grande en todos los aspectos, pero el que más resaltaría sería el de los profesores. No me parecía normal que hubiese un profesor por cada asignatura, pero luego vi que era maravilloso. Conocí a Elena Mengual, doctora en Matemáticas, que fue mi profesora de esta rama. La primera vez que descubrí qué eran las matemáticas con ella, ya sabía que quería ser matemática. Recuerdo que llegué a casa y dije: «mamá, quiero ser matemática» y mi madre se preguntó de dónde vino ese cambio repentino, ya que antes quería ser científica y hacer experimentos. La forma en que me acercó a las matemáticas fue excepcional, y cada vez que tengo la oportunidad de que me explique algo, es como si fuera la primera vez, el primer día y las mismas sensaciones. Siento que las matemáticas son un mundo donde puedes sentirte a ti mismo, indagar para ver lo que encuentras y colaborar con personas maravillosas para generar un impacto en el mundo, la realidad. Me acuerdo que en clase aparte de estudiar, Elena nos hablaba del teorema de Riemann, que por aquella época, había gente intentando resolverlo. Ese año fue genial. Elena me dio la oportunidad de participar en la Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO, estando en primero. Me acuerdo de que estaba muy nerviosa, porque aunque los problemas de entrenamiento me salían bien, sabía que habría más gente y más mayor que yo que también podría ser capaz. Estuve entrenando, y mi profesora me iba enseñando en los recreos algunos conceptos de 2.º de ESO que podrían

entrar dentro de la prueba de la Olimpiada. Llegó la semifinal, y ese día estaba medio enferma, pero yo no iba a perder esa oportunidad, así que fui. La verdad que fue inolvidable, me acuerdo de los problemas, y que el que nadie resolvió de mi instituto, lo resolví yo mediante el teorema de Pitágoras. Me pareció alucinante ver a tantos niños y niñas participando. Yo no estaba segura de si podría pasar a la siguiente fase, pues sabía que unos problemas que luego parecían muy fáciles, en el momento de hacerlos no lo fueron para mí. Pasaron los días, y el 30 de abril de 2019 le escribí a Elena preguntándole acerca de un proyecto que estábamos llevando a cabo en el colegio, y su respuesta fue: «eres la única que ha pasado a la final de las olimpiadas del colegio. Enhorabuena!!!, eres una campeona». Al leer este correo no daba crédito, simplemente increíble. Llegó el 11 de mayo de 2019, el día de la final, y fui con Elena a Zaragoza a la Universidad de Zaragoza para poder participar. En el coche estuvimos hablando de la carrera de matemáticas, de los exámenes de la facultad, de las asignaturas, profesores… Cuando llegamos, vi a mucha gente, y en la lista, yo era la número 25, cosa que me pareció muy interesante porque justo mi cumpleaños es el 25. Entré a la sala y me pareció asombrosa, me sentía como si fuese una estudiante de la universidad, entrando a un examen super importante. No gané, pero el recuerdo siempre lo tendré en mi mente. A partir de allí, me dije a mí misma: «esto el año que viene no pasará, estudiaré en el verano para poder venir mejor preparada» y así fue. Ese verano mis tíos me regalaron el libro de *Álgebra* de Baldor, y lo estudié durante todo el verano. Es un libro completamente de álgebra, donde te enseña todas las bases que necesitas para saber desenvolverte en este campo. Luego, en 2.º de la ESO, tenía libros de matemáticas, y Elena me iba explicando lo que no entendía, como el binomio de Newton y el teorema de Pascal. Llegó la pandemia, y la olimpiada se canceló; fue triste debido a que ese habría sido mi último año en dicha olimpiada, pero de todo se sale. Ese verano, estudié los libros de bachillerato de matemáticas académicas y empecé con libros en inglés de la Universidad de Springer. ¡Me dí cuenta de que podía resolver problemas de las olimpiadas de bachillerato en aquel momento! Entré dentro de un montón de campos de las matemáticas que no conocía y todos me llamaban la atención. También, a causa de la pandemia, conocí a muchas personas en las redes sociales con los mismos intereses que yo, y hacíamos grupos de estudio para leer libros y luego poder compartir ideas.

Este curso académico, empecé en 3.º de educación secundaria, pero debido a altas capacidades y que ya sabía todo el temario de las asignaturas, me adelantaron a 4.º en el segundo trimestre. Esta experiencia mucha gente la ve negativa; «parece que te estás quitando la infancia» decían algunas personas, pero mi opinión aquí es muy clara: La edad no tiene por qué determinar a qué grupo o a dónde perteneces; si de verdad quieres algo, tienes que perseguirlo y no dejar que comentarios negativos te digan lo contrario. Además, en la temporada 2020-2021 fui aceptada en un curso de computación cuántica ofrecido por Qubit by Qubit, MIT, IBM, Oxford y otras universidades. Como os he comentado antes, me gusta mucho la programación, tecnología y física cuántica. Conocí este curso gracias a las redes sociales, y al principio me llamó mucho la atención que lo estuvieran ofreciendo internacionalmente con profesores de dichas universidades y gratis gracias a IBM. Me acuerdo que mi padre me dijo que quizás era muy difícil porque cuando él estaba en la universidad, la computación cuántica era un tema

que pocos entendían, y yo, cómo no, para demostrarle que era capaz, y también para poder tener la oportunidad de conocer a los demás estudiantes, formar unas bases fuertes de matemáticas y conocer uno de los campos en la tecnología más novedosos, decidí aplicar. Uno de los requerimientos era conocer trigonometría y álgebra lineal, también ganas de aprender y ser un futuro *Quantum Leader*. Pensaba que iba a ser difícil que me seleccionaran, puesto que buscaban gente que de verdad pudiese aportar algo a la cuántica y a la comunidad, aparte que hubo más de 15 000 aplicaciones. Para mi sorpresa, recibí un correo felicitándome porque ¡había sido admitida en el curso! Fue completamente genial, lo leí a las tres de la mañana y no podía de la alegría. El curso empezó con clases de matemáticas de nivel universitario para poder asegurarse de que todos tenían las bases necesarias para poder introducirse dentro de la computación cuántica. El segundo semestre fue más enfocado a enseñar programar en Python y usar Quiskit para poder utilizar los ordenadores cuánticos que ofrece IBM. Una curiosidad es que en el curso todo el mundo me conocía debido a que mis pósteres y apuntes llegaron hasta el equipo ejecutivo y se colgaba en la plataforma como material oficial del curso. Esta temporada, también fui elegida como la Embajadora Estudiantil de Technovation en España. Technovation es un programa que busca acercar a las niñas y jóvenes a los campos STEM, centrándose en la tecnología, y es por ello que cada año se celebra un concurso internacional en el que se premia con becas a las mejores aplicaciones programadas por niñas. Mi labor como embajadora es motivar a las jóvenes y niñas a que se apunten, así como mostrarles a las mentoras que pueden ser parte del futuro de aquellas niñas.





El año 2021 ha sido el más productivo en cuanto a rendimiento para mí, y en cuanto a lanzar nuevos proyectos. He sido seleccionada como World Science Scholar (que es un programa organizado por World Science Festival que selecciona a 45 niños de todo el mundo, con habilidades excepcionales en matemáticas para introducirles en cursos y proyectos con ganadores de Premios Nobel, científicos reconocidos a nivel mundial; como Brian Greene, Stephen Wolfram…) También he creado una organización internacional llamada Meteorite Global que busca motivar a todo el mundo a encontrar su propósito en la vida, focalizándose en el ámbito de los estudios, y proporcionar materiales gratis a todo el que quiera. La embajada de Estados Unidos me ha premiado con una beca para el programa Women2Women de EmpowerPeace en el que se aprende de liderazgo y busca crear líderes del mañana.

Estos son algunos de los muchos proyectos y logros que he conseguido; y todo esto gracias al efecto mariposa y la motivación… Si te pones a pensar, si no hubiera conocido a Elena no hubiera llegado hasta aquí, pues el presente sería diferente.

Ahora, para finalizar, tengo un mensaje para todo el mundo que está leyendo esto: Encuentra lo que te apasiona y no dejes que se apague la chispa que llevas dentro, persigue tu sueño; y si descubres que el campo en el que creías que ibas a estar más cómodo no es el correcto, no te desanimes! La vida está llena de oportunidades que no hay que dejar pasar y encontrarás la siguiente muy pronto… No hay nada imposible, y ¡hay que llegar tan alto como un meteorito!

Cómo determinar el valor de π con cosas buenas de comer y una balanza

por

José Luis Cebollada Gracia

(IES La Azucarera)

Al finalizar la reunión del Club de los Insolidarios los siete miembros decidieron encargar una *pizza*. Eligieron la *pizza* Siracusa que costaba 12,56 €. Al revisar los bolsillos, Benjamín, el más joven, se dio cuenta de que no llevaba más que 56 céntimos. Decidieron encargarla igualmente; cada uno aportó 2 € y Benja, sus céntimos. Por supuesto que a la hora de repartir, los pedazos fueron proporcionales a la cantidad aportada: seis trozos iguales y uno pequeño de aproximadamente la cuarta parte que los demás. ¡Esto no es una oenegé!, musitó entre dientes el presidente.

Aunque nunca hubo matemáticos en este club, los lectores ya habrán deducido que los seis trozos iguales deberán tener un ángulo de un radián y el pequeño, 0,28 radianes. Para proceder al corte bastaría con localizar el centro de la *pizza*, medir el radio y cortar pedazos cuyo arco midiera exactamente el radio, el resto sería para Ben.

Figura 1. Las siete raciones de la *pizza* del Club de los Insolidarios listas para repartir

Si queremos comprobar que el reparto ha sido justo, bastaría comparar (con un trozo de hilo, por ejemplo) la fracción que supone el trozo de Ben frente al de sus insolidarios compañeros. Este método sería similar al que usarían los egipcios sobre las arenas del Nilo, según la interpretación de Beckmann [1].

Métodos para calcular el valor de π hay muchos, algunos con lápiz y papel y otros que requieren más *hardware*.

Al primer grupo pertenece el de Arquímedes [2]. Respecto a los segundos: está el método Montecarlo [3], que relaciona el área de un cuadrado de lado $2r$ con la de un círculo de radio r o el de Buffon, mucho menos intuitivo [4].

A continuación se presenta un método de cálculo del valor de π manipulativo, sin utilizar cinta métrica, en su lugar usaremos una balanza. Se ha experimentado en un taller realizado con alumnos de 2.º de ESO que no conocían el concepto de radián.

Acotamos el valor de π

Si cortamos una tarta (o tortilla o *pizza* o un disco de cartón recortado de una caja vieja) en raciones de un radián, es decir, de un quesito con los tres lados iguales, nos saldrán seis raciones y pico. Y como π es la relación entre la longitud y el diámetro de una circunferencia, 2 π es seis y pico, o sea, que el valor de π es mayor que 3 y menor que 3,5.

Medimos el valor de π

Si ahora comparamos ese trozo que nos sobra con uno de los trozos enteros podremos calcular los decimales de 2 π y por lo tanto, el valor de π. Así, el cociente entre la masa del trozo pequeño y la masa de un trozo grande, o mejor aún, la media de los seis trozos enteros, nos dará los decimales de 2 π.

Materiales

Para llevar adelante las medidas necesitamos:

— Alimentos fácilmente cortables de forma circular: *pizza*, tortilla de patata sin cebolla, bizcocho.
— Discos de cartón recortados.
— Cuchillo, tijeras, cúter.
— Balanza de laboratorio.
— Un hilo grueso.

Corte del bizcocho

— Con dos trozos de hilo se localiza el centro del bizcocho. Cada hilo será un diámetro, es decir, la distancia máxima entre dos puntos que pertenecen a la circunferencia exterior.

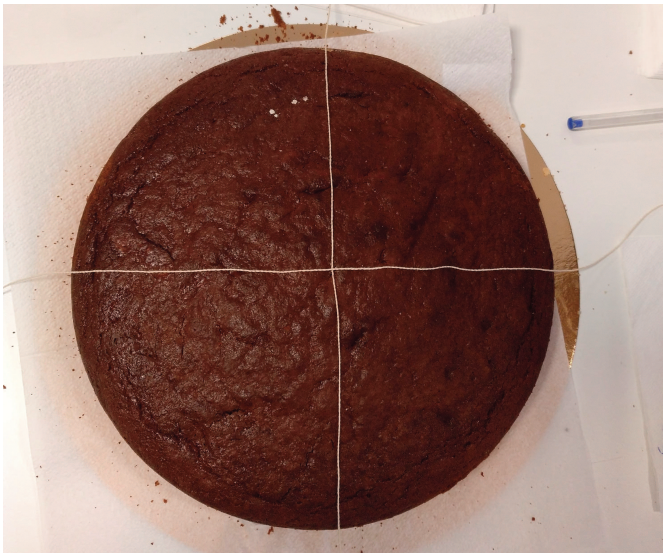


Figura 2. Buscando el centro en la intersección de dos diámetros

— Una vez localizado, se corta un trozo de hilo del tamaño del radio (r). Servirá para el resto de la actividad.
— Se practica un corte desde el centro del bizcocho hasta el exterior.
— Se coloca el hilo de longitud r a lo largo del exterior del bizcocho y donde finalice el hilo se practica el segundo corte.
— Se sigue cortando hasta que se acabe el bizcocho. El trozo pequeño que sobra nos servirá para calcular la parte decimal de 2 π.

Figura 3. El bizcocho cortado en las siete raciones

Cálculo de 2 π

El arco de cada una de las seis primeras porciones mide lo mismo que el radio. Falta por determinar cuánto mide el trozo que nos ha sobrado, que son los decimales de 2π, que es algo más de 6.

— Pesamos cada uno de los 6 trozos (T_i) de bizcocho y calculamos la media (M)
— Pesamos el resto que ha sobrado (R).
— Para calcular qué fracción representa hacemos el cociente R/M. Esta fracción en masa es la misma que la fracción en arco de sector circular, pues, en productos homogéneos la masa es directamente proporcional al arco.

Para un bizcocho perfecto cortado por cortadores perfectos que utilicen cuchillos perfectos y pesen los pedazos en balanzas perfectas, el resultado obtenido será 0,283185…

Los datos obtenidos con el bizcocho de chocolate se recogen en la tabla 1.

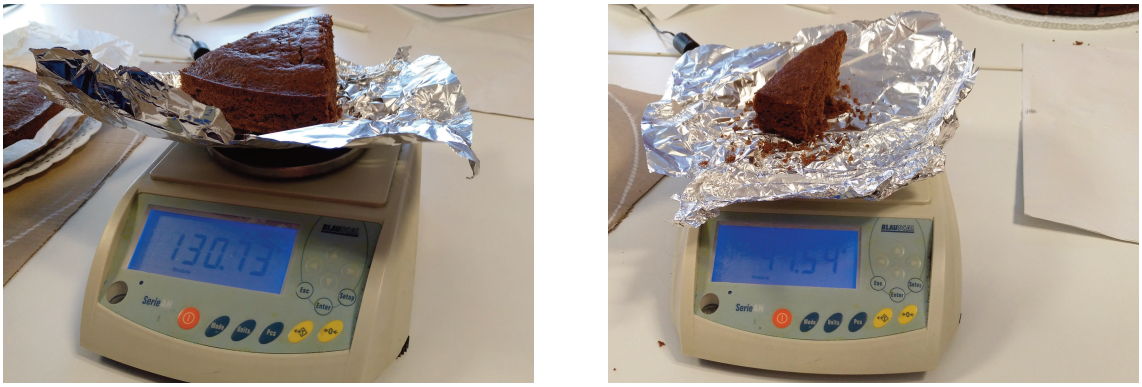


Figura 4. Peso de una ración grande y de la ración pequeña

Masa (g)	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	Media (M)	Masa resto (R)
Bizcocho	142,20	135,45	121,29	129,03	122,25	130,37	130,16	41,54

Tabla 1

El cociente entre el pedazo final y el pedazo *promedio* es: $\dfrac{R}{M} = \dfrac{41{,}54}{130{,}16} = 0{,}32.$

De donde obtenemos un valor de 2π de 6,32.
Y por tanto un valor de π de 3,16.

Un resultado sorprendentemente bueno a pesar de los errores que se cometen en el proceso pero podría ser resultado del azar, por eso vamos a repetir el experimento con diferentes tipos de círculos.

Se repite el proceso para trozos de cartón cortados por los alumnos; uno de ellos de doble capa con ondulado y otro rígido, sin ondulado, con una *pizza* y una tortilla de patata.

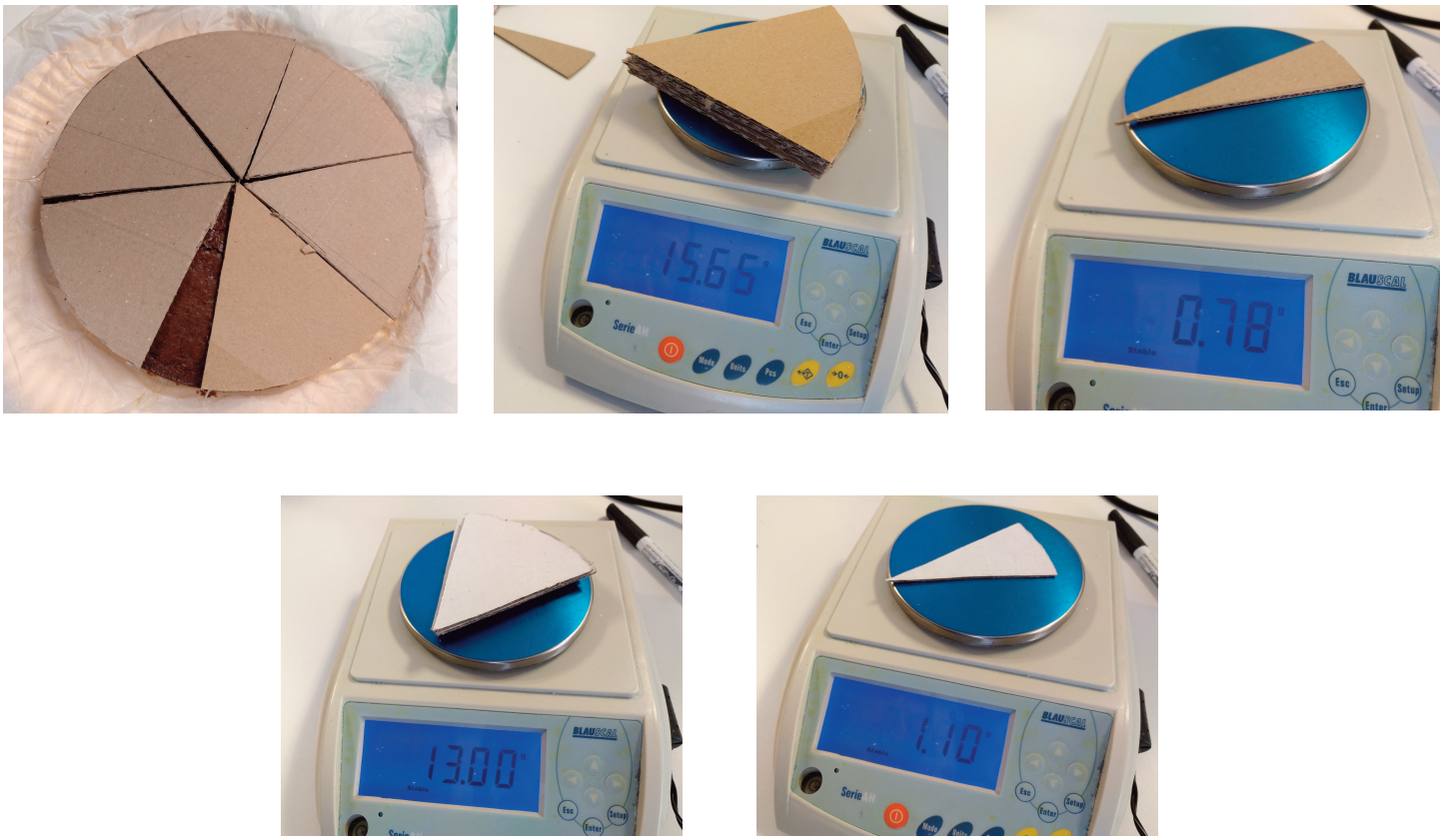


Figura 5. Distintas fases de la obtención de datos con cartón ondulado y con cartón rígido

Los resultados obtenidos de recogen en la tabla 2.

	Cartón liso	*Cartón ondulado*	*Bizcocho*	*Pizza*	*Tortilla*
T_1 masa (g)			142,2	66,2	85,85
T_2 masa (g)			135,45	68,7	91
T_3 masa (g)			121,29	63,53	89,39
T_4 masa (g)			129,03	78,79	80,08
T_5 masa (g)			122,25	70,8	82,28
T_6 masa (g)			130,37	77,4	104,35
MEDIA (*M*) masa (g)	2,17	2,61	130,10	70,90	88,83
RESTO (*R*) masa (g)	1,1	0,78	41,54	16,29	32,16
COCIENTE *R*/*M*	0,51	0,30	0,32	0,23	0,36
2π	6,51	6,30	6,32	6,23	6,36
π	3,25	3,15	3,16	3,11	3,18

Tabla 2

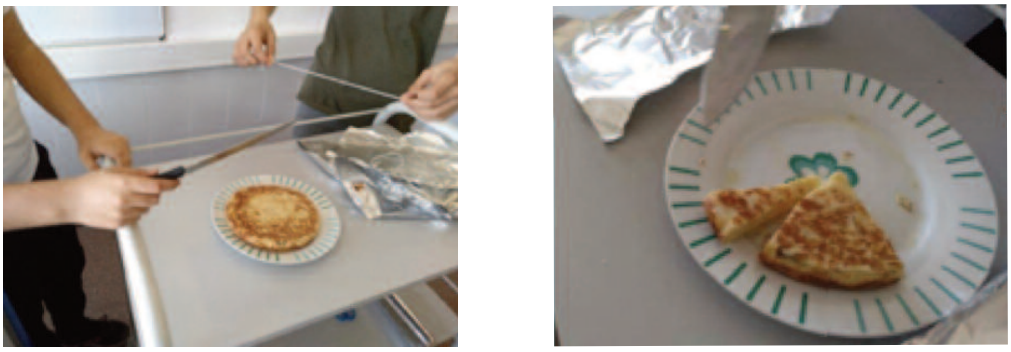


Figura 6. Tortilla de patata al inicio y al final de proceso

Discusión posterior

Es muy difícil obtener empíricamente un valor muy próximo al real pero esto da pie a una discusión interesante sobre el origen de los errores que vamos cometiendo y la calidad de nuestros resultados. Del análisis en grupo del proceso podemos destacar las siguientes ideas aportadas por los alumnos:

— El bizcocho no tiene por qué ser perfectamente homogéneo, hay zonas algo más altas que otras.
— Los cortes no salen todo lo bien que querríamos.
— En los cortes siempre se perderá alguna miga, lo que es más evidente cuando tratamos con repostería.
— En el caso de la *pizza* las raciones son evidentemente heterogéneas, pero la masa de cada ración es muy parecida. Probablemente el peso de la *pizza* dependa básicamente de la masa y no del resto de los ingredientes, que en las *pizzas* comerciales están en cantidades raquíticas.
— Se consideró obvio que había una relación lineal entre el ángulo —o el arco— y el peso de la ración… a pesar de las imperfecciones.
— El cartón se dibujó tomando una lata de galletas de mantequilla como plantilla; los errores procedieron tanto del dibujo de la circunferencia como del posterior recorte con tijeras o cúter.

Nota final

Esta actividad se ha realizado con alumnos de 2.º de ESO para quienes el término radián no tiene ningún significado. Tampoco encuentran el sentido de abandonar el uso de los grados como medida de los ángulos para introducir una nueva unidad. Sin embargo ha sido necesaria la construcción de raciones de un radián para encontrar el valor aproximado de π.

El método, que bien pudieran usar los miembros del Club de los Insolidarios en sus reuniones, no se trata de un nuevo método [5], pues trasladamos las proporciones que los egipcios hacían con las longitudes de los respectivos arcos, a la masa. Ellos, los egipcios, carecían de balanzas electrónicas y, muy probablemente, de patatas para hacer tortilla.

Si comparamos el esfuerzo necesario para preparar y realizar estas medidas con este método con otros como el de Montecarlo o Buffon, la relación esfuerzo-resultado es bastante favorable al que se acaba de presentar. Los materiales son bastante asequibles. Y aunque en los departamentos de Matemáticas no suelen abundar las balanzas, una visita a los vecinos de Biología o de Física y Química puede solventar esta carencia.

Notas

1 Beckmann, P. (1993), *A history of Pi*, Barnes & Noble Books, 13.

2 <https://proyectodescartes.org/descartescms/matematicas/miscelaneas/item/1062-aproximaciones-del-numero-pi>, *Aproximación por polígonos inscritos*.

3 <https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Montecarlo>.

4 Beckmann, P. (1993), *A history of Pi*, Barnes & Noble Books,159-161.

5 Hasta la fecha de redacción de este artículo (verano de 2021) no he conseguido encontrar descripciones de este método.

Estudio comparativo en resolución de problemas de cálculo mental entre Educación Infantil y Primaria

por
Inés Velázquez Ortigas y Juan Miguel Ribera Puchades
(Universidad de Zaragoza; Universidad de La Rioja)

Comprender la realidad requiere adquirir conceptos y procesos matemáticos que permitan interpretar y actuar en diferentes situaciones (Fernández-Bravo, 2008). Desde un enfoque educativo, en los últimos años se ha apostado por una enseñanza de las matemáticas integral, donde lo importante no es solo el contenido sino los procesos que se ponen en marcha para aplicar el conocimiento (Alsina, 2014). Este planteamiento acerca las matemáticas a la realidad a través de procesos básicos como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la representación y el establecimiento de conexiones (NCTM, 2003).

Autores como Chamorro (2005a), afirman que los primeros contenidos matemáticos se adquieren antes de empezar la escolarización, y que por tanto es en las primeras etapas educativas donde se debe motivar el aprendizaje de las matemáticas, debido a la capacidad de aprendizaje del alumnado. Aunque una de las metodologías más utilizadas en Ed. Infantil son los centros de interés (Alsina, 2012; Canals, 2009), en la presente comunicación se ha optado por una propuesta basada en la resolución de problemas, ya que como señala De Castro (2007), es un enfoque centrado en el razonamiento y en el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otro lado, se contemplan diferencias destacables entre las etapas de Educación Infantil y Educación Primaria, de manera que contenidos y metodología muestran un salto que, en algunos casos, puede ser motivo de dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos (Chamorro, 2005a; Fernández-Bravo, 2010).

Dichas diferencias pueden minimizarse a través de la resolución de problemas, un enfoque postulado por diferentes autores (Berga, 2013; Castro, Del Olmo y Castro, 2002; López y Alsina, 2015) como el idóneo para la adquisición de conceptos matemáticos. La resolución de problemas se presenta como una actividad vivencial en la que se debe comprender el contexto, interpretar y actuar, es decir, se centra en los procesos que se ponen en marcha para llegar al resultado, no en la solución final (Barrantes y Zapata, 2010; Gaulin, 2001).

Por ello, la presente comunicación tiene su base en las dificultades de aprendizaje en el cálculo mental en la etapa de Educación Infantil, concretamente en el último curso del segundo ciclo y Educación Primaria. Se considera esencial conocer qué contenidos relacionados con la aritmética se presentan en cada una de las etapas y cómo se están trabajando, con la intención de actuar consecuentemente en Educación Infantil y asentar bases para una transición de etapa más conectada.

Objetivo

Analizar la capacidad de los alumnos de último curso de Educación Infantil y primer curso de Educación Primaria, de una muestra seleccionada, para resolver problemas que requieren del cálculo mental.

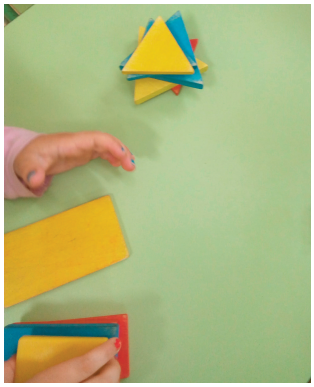
Método

Se realiza un estudio de caso en el segundo ciclo de Educación Infantil y primer curso de Educación Primaria. El instrumento consta de cinco actividades organizadas en tres bloques: *Preevaluación*, como base para analizar los conocimientos de los que parte el alumnado en ambas etapas; *Intervención*, según los resultados obtenidos, se realizan actividades en Educación Infantil que desarrollen el cálculo mental; *Evaluación*, como valoración de la adquisición e integración de conocimientos, en Educación Infantil, a través de una actividad similar a la presentada en la preevaluación de Educación Primaria.

Los datos se recogen a través de grabaciones de video, la propia observación en el momento de desarrollo de las actividades y un anecdotario donde se registran las situaciones y verbalizaciones consideradas como destacables. Se valora la actuación del alumnado frente a los problemas planteados, así como las reflexiones e interacciones entre ellos y con la maestra.

De forma cuantitativa se concretan tres niveles de resolución: *Sí*, realizar la actividad de forma autónoma y fluida con el cálculo mental; *Intervención*, se necesitan de indicaciones; *No*, el alumno no lleva a cabo ninguna acción o, aunque se interviene, el alumno no llega a la resolución del problema. Cualitativamente se exponen razonamientos, acciones y verbalizaciones del alumnado que se consideran relevantes.

Para garantizar la fiabilidad y validez de los datos, las grabaciones son analizadas por dos investigadores, uno de ellos con rol participante en el desarrollo de las sesiones. El análisis de los datos se pone en común y se acuerda qué actuaciones corresponden a cada uno de los tres niveles de logro estipulados.



Resultados

Los resultados obtenidos muestran diferencias entre la etapa de Educación Infantil y Educación Primaria. Cuantitativamente, en las actividades de preevaluación, solo un alumno de Educación Infantil se etiquetó con *Sí*, mientras que 13 alumnos de dicha aula, necesitaban las manos para realizar las operaciones, aunque no se observó dificultad para asociar la grafía del número con la cantidad. Por su parte, en Educación Primaria, los alumnos mostraron la mecanización de operaciones no solo con la realización de la actividad sino también con comentarios como: «Esto es muy fácil».

Respecto a la intervención, un mayor número de alumnos operó a través del cálculo mental. Aunque varios seguían necesitando indicaciones para resolver los problemas, algunos alumnos reflexionaron sobre la ayuda que suponían los materiales manipulativos presentados. Igualmente, se observaron ciertas dificultades ante la representación gráfica del número y confusión entre adición y sustracción, reflejada en situaciones como: «5 menos 2 son 7».

En la actividad de evaluación, el número de alumnos de Educación Infantil calificados con *Sí* aumentó respecto a la actividad de preevaluación. Cabe destacar que el alumnado realizó diferentes comentarios aludiendo al uso de materiales manipulativos como un recurso motivador y facilitador para la comprensión y realización de operaciones.

Conclusiones

Se ha observado que los contenidos y habilidades que son mecánicos en Educación Primaria, se encuentran alejados del alumnado de Educación Infantil. Esta situación expone las orientaciones de autores como Molina (2009) o NCTM (2003), quienes señalan que el cambio de etapa supone la adquisición de contenidos que parten de una base previamente asentada, por lo que la transición requiere de trabajo y cuidado en ambas etapas.

En concordancia con lo expuesto por Chamorro (2005a; 2005b) y Ruiz-Higueras (2005), señalan la adquisición del número como un proceso basado en el conteo, la identificación y la representación a través de situaciones reales que permiten experimentar y dar funcionalidad. Sin embargo, los resultados de las actividades de intervención y evaluación evidencian un aprendizaje aritmético más centrado en contenidos como el conteo o la grafía del número, presentando cierta confusión en la representación gráfica, las relaciones de adición y sustracción entre cantidades y en procesos que requieren de la identificación y razonamiento, como la resolución de problemas.

Por otro lado, se han encontrado limitaciones de organización, como el número de horas cedidas por el centro educativo, la variación del número de alumnos en las diferentes actividades y desaciertos con la creación de algunos materiales que suponía un nivel cognoscitivo muy elevado para los alumnos de Educación Infantil.

Está claro que la enseñanza de las matemáticas debe basarse en habilidades relacionadas con la realidad de manera que el proceso de aprendizaje se realice en un contexto familiar, y atractivo. Sin embargo, lo expuesto muestra una enseñanza de las matemáticas centrada en la grafía del número y la realización de operaciones.

Recursos bibliográficos

Alsina, Á. (2012), «Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades», *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 80, 7-24.

— (2014), «Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave», *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 86, 5-28.

Barrantes, M., y M. A. Zapata (2010), «La resolución de problemas aritméticos y su tratamiento didáctico en la Educación Primaria», *Campo Abierto*, 29(1), 77-95.

Berga, M. (2013), «El juego con materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 3 a 4 años», *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2).

Canals, M.ª A. (2009), *Lógica a todas las edades*, Asociación de Maestros Rosa Sensat, Barcelona.

Castro, E., M. A. Del Olmo y Castro, E. (2002), *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*, Universidad de Granada.

Chamorro, M.ª C. (2005a), *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*, Pearson Prentice Hall, Madrid.

— (2005b), «La construcción del número natural», en M.ª C. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 141–180.

De Castro, C. (2007), «La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil», *UNIÓN: Revista iberoamericana de educación matemática*, (11), 59-77.

Fernández-Bravo, J. A. (2008), *Desarrollo del pensamiento lógico y matemático*, Grupo Mayéutica Educación, Madrid.

— (2010), *La resolución de problemas matemáticos: creatividad y razonamiento en la mente de los niños*, Grupo Mayéutica Educación, Madrid.

Gaulin, C. (2001), «Tendencias actuales de la resolución de problemas», *Sigma: Revista de matemáticas*, 19.

López, M., y Á. Alsina (2015), «La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en educación infantil», *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(1).

Molina, M. (2009), «Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria», *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2003), *Principios y estándares para la educación matemática*, (Obra original publicada en 2000), Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Sevilla.

Ruiz-Higueras, L. (2005), «La actividad lógica en la Escuela Infantil», en M.ª C. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 101-140.

La resolución de problemas, mucho más que un eslogan

por
Pablo Beltrán-Pellicer[1 3], Sergio Martínez-Juste[2 3]
([1]CPI Val de la Atalaya, [2]IES Pilar Lorengar, [3]Universidad de Zaragoza)

En el saco de las metodologías activas, participativas y sociales se introduce, normalmente, todo lo que no sea clase tradicional, sea lo que sea a lo que se refiera ese término. Especialmente, se meten acrónimos, términos anglosajones y, últimamente, cualquier cosa con el adjetivo emocional o el prefijo «neuro».

Un clásico de las metodologías activas es el *flipped learning*. ¿Es realmente tan innovadora esta metodología? Como señalan Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019), al margen del elemento tecnológico, la clase invertida asume algunas de las prácticas habituales de la enseñanza tradicional. Por ejemplo, tal como señalan estos autores, que el contenido tiene que ser explicitado antes de que el alumnado aborde la tarea, sin reservar momentos a su construcción, exploración o aparición como solución óptima ante un problema que le sirva como razón de ser.

¿Enseñar para después aplicar a problemas o enseñar a través de la resolución de problemas? Para nosotros, este segundo enfoque sería la auténtica revolución en la clase de matemáticas. Esto sí que invertiría las clases «tradicionales». En vez de dar la «teoría» (sea lo que sea que es eso) para después aplicarla a problemas, usamos los problemas para hacer surgir la «teoría». Observe el lector que hemos empleado comillas al referirnos a la clase tradicional. Somos conscientes de que es un constructo complicado de definir, y que puede haber tantas tradiciones como escuelas de pensamiento. Sin embargo, en la literatura suele emplearse este calificativo para aglutinar prácticas de enseñanza basadas en técnicas expositivas.

Es raro encontrarte un docente de matemáticas que no piense que la resolución de problemas ocupa un lugar central en el currículo escolar. Esto ha sido así desde siempre. Ahora bien, aceptar la idea de que hay que prestar atención a la habilidad para resolver problemas, es otra cosa. Esto ha llevado a cierta confusión, y el término «resolución de problemas» se ha convertido en un eslogan que acompaña diferentes visiones sobre lo que es la educación, lo que es la escolarización, lo que son las matemáticas, y de por qué se debería enseñar matemáticas en general y resolución de problemas en particular (Stanic y Kilpatrick, 1989).

La enseñanza a través de la resolución de problemas podría describirse como un modelo de constructivismo guiado, muy relacionado con el aprendizaje basado en problemas (Lopes y Costa, 1996), pero que se introduce como alternativa a los enfoques para y sobre la resolución de problemas (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Gaulin, 2001). El objetivo es que el contenido matemático emerja de la propia resolución de diversas situaciones y problemas. A continuación, exponemos algunas ideas para ilustrar en qué consiste.

Estadística

La varianza es mucho más que la fórmula que se emplea para calcularla. Más aún, la dispersión no es algo que haya que medir porque sí, sino que tiene una razón de ser. A lo largo de la década de los 90, en plena efervescencia LOGSE, se generaron magníficos materiales didácticos. En Beltrán-Pellicer (2020a) y Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste (en prensa) se describe la implementación de una secuencia diseñada a partir de la adaptación de una actividad de la Guía Praxis, titulada *Un extraño equipo de baloncesto* (Borrell, Pol y Saguer, 1998). Con el currículo actual, la secuencia está dirigida a alumnado de 2.º de ESO. La pregunta que va a motivar todo es la siguiente, tal como se plantea a la clase:

> Estamos en un partido de baloncesto. Pongamos que se trata de una final, que queda un minuto y que el entrenador tiene que decidir a qué jugadora sacar.

Después de una breve charla de clase, que aprovechamos para discutir acerca de los datos que necesitaríamos, viene la pregunta que se constituye en razón de ser de la secuencia:

> Vamos a intentar averiguar a quién sacaría si va perdiendo de 8 puntos y a quién sacaría si va ganando de 2 puntos, y tenemos como datos los porcentajes de acierto.

En otras palabras, la decisión que debe tomar el entrenador, con los datos disponibles, es si sacan al mismo tipo de jugadora cuando se va ganando por poco que cuando el partido está prácticamente perdido, pero con alguna posibilidad de ganar. ¿Y qué datos son esos?

Es posible que algunos lectores piensen que el bloque de «Estadística y Probabilidad» es propicio a este tipo de actividades. Las creencias sobre la enseñanza de la estadística también pueden estar influenciadas por las creencias sobre la estadística en sí misma. Parece algo circular, pero no. Una cosa es la estadística y otra, cómo nos planteamos su enseñanza. Y ambas están relacionadas, así como con las matemáticas y con la enseñanza en general. Por ejemplo, si el docente enseña matemáticas de una manera descontextualizada y sin significado, es posible que entonces use un enfoque similar en estadística. Quizás, practicando primero los procedimientos antes de dar ejemplos de «aplicación» con un contexto débil, para «disimular». Las creencias también pueden verse influenciadas por el grado en que los docentes ven el valor de la estadística en el mundo real. Algo curioso es que los profesores de matemáticas que no valoran mucho el trabajo en grupo, pero que sienten la presión de realizarlo, pueden creer que las unidades de estadística ofrecen esta oportunidad más que otros temas (Pierce y Chick, 2011). De hecho, por esto hemos elegido esta actividad sobre dispersión y no el clásico proyecto de estadística. Entonces, ¿qué hacemos con el resto de los bloques de contenido? La respuesta es sencilla, lo mismo.

Números

En el bloque de «Números», sin ir más lejos, nos encontramos con multitud de oportunidades para introducir contenidos desde la resolución de problemas. Desde técnicas de recuento sistemático en 1.º ESO (Gairín y Sancho, 2002) (figura 1), iniciando un recorrido que terminaría en 4.º ESO con situaciones de combinatoria más complejas, hasta la deducción de las propiedades de las potencias, pasando por situaciones de estimación donde se ponen en juego ideas de proporcionalidad (Beltrán-Pellicer, 2020b).

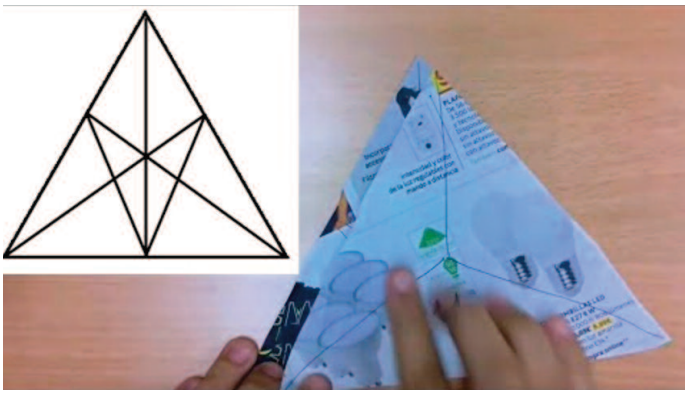


Figura 1. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?
Actividad de conteo no trivial que requiere de procedimientos sistemáticos

Proporcionalidad

El fenómeno de los vídeos educativos alojados en plataformas en línea no es nuevo. El alumnado de secundaria y, en menor medida, el de primaria, dedica gran parte de su tiempo de ocio a las redes sociales, entre las cuales se encuentran servicios y aplicaciones donde se comparten vídeos. De esta forma, es natural que utilicen estas producciones para ayudarse en sus estudios. Los numerosos vídeos educativos en línea disponibles actualmente están

dando lugar a un área emergente de investigación acerca de su grado de adecuación (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018). La existencia de vídeos con argumentos poco precisos o procedimientos incorrectos, unida a la natural diversidad de niveles algebraicos utilizados, sugiere que los docentes deben ser cuidadosos seleccionando y recomendando aquellos vídeos que mejor se adapten a su alumnado. Esto ha dado lugar a realizar diversas acciones formativas en el ámbito de la formación inicial de docentes (Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020).

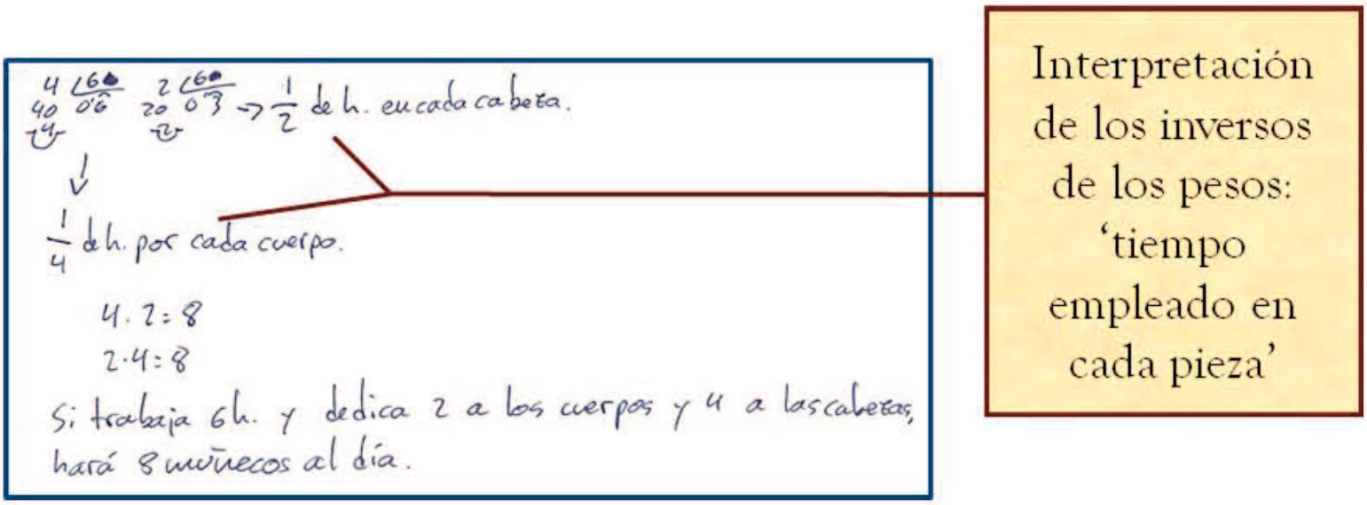


Figura 2. Estrategia intuitiva de un alumno al resolver un problema de repartos inversamente proporcionales

¿Por qué no arrancar el aprendizaje de los repartos desde la resolución de problemas? En Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019) se describen las estrategias intuitivas que ponen en juego los alumnos cuando tratan de resolver repartos inversamente proporcionales, sin haber recibido instrucción previa en ese sentido (figura 2).

Conclusiones

Cuando sale el tema de la enseñanza a través de la resolución de problemas es común escuchar expresiones del tipo «es que se quedan ahí, ni leen», «no saben hacer nada», y «termino explicando yo en la pizarra». Partiendo de que algo sí que sabrán hacer, lo que ocurre es que es posible que apenas se hayan visto en la tesitura de tener que leer y poner en juego lo que ya saben. Esto da lugar a que nos agobiemos, porque puede dar la impresión de que no se avanza.

Esta resistencia inicial no es otra cosa que una ruptura del contrato didáctico, un cambio en la cultura de aula. Y se ha descrito múltiples veces en la literatura especializada lo que ocurre si vas con un enfoque a través de la resolución de problemas a una clase acostumbrada a otra cosa (Sullivan, Knott y Yang, 2015). Es algo que se soluciona, en términos de los autores, con coherencia incansable (*relentless consistency*). No es cosa de un día o dos, no. Se trata de un trabajo continuo desde un enfoque en el que cambian las reglas del juego. Si observamos que el alumnado no lee el enunciado, ¿la solución pasa por leérselo nosotros? Si observamos que el alumnado no pone en juego conocimientos que ya posee, ¿tenemos que ponerlos nosotros sobre la mesa? ¿Qué tipo de actividad matemática tiene lugar en clase? ¿Hay actividad matemática? Desde luego, no es dejar a los alumnos en la selva, sino proporcionar el andamiaje necesario.

Obviamente, este enfoque de constructivismo dirigido necesita tiempo. Aunque habría que reducir el número de procedimientos que enseñamos, también hay que diferenciar entre lo que señala el currículo (que también tiene un bloque 1 que daría para hablar largo y tendido) y lo que aparece en ese otro currículo de facto que son los libros de texto. Lo que está claro es que también necesita de preparación. Por eso, desde aquí reivindicamos la necesidad urgente de que los planes de formación continua contemplen las didácticas específicas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Queremos dedicarlo a nuestros alumnos y compañeros, tanto de instituto, especialmente a Aurora Domenech y Ana Martínez; como del Área de Didáctica de las Matemáticas (Unizar).

Referencias bibliográficas

ARCE, M., L. CONEJO y J. M. MUÑOZ-ESCOLANO (2019), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, Editorial Síntesis, Madrid.

BELTRÁN-PELLICER, P. (2020a), «Las medidas de dispersión con pinceladas de didáctica», en J. Garrido-Bautista y V. G. Tagua, *Libro del I Congreso Virtual de Divulgación de Hilos de Twitter, Desgranando Ciencia 6,* Asociación Hablando de Ciencia, Granada, España, 87-90.

— «Una actividad para trabajar la estimación en clase de Matemáticas con arroz», en P. Usán y C. Salavera (Coords.), *Gamificación Educativa, Innovación en el aula para potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje,* Pregunta Ediciones, Zaragoza, España, 257-266.

BELTRÁN-PELLICER, P., B. GIACOMONE y M. BURGOS (2018), «Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas», *Cultura y Educación*, 30(4), 633-662.

BELTRÁN-PELLICER, P., y S. MARTÍNEZ-JUSTE (en prensa), «Enseñar a través de la resolución de problemas», *Suma*.

BORRELL, F., A. POL y E. SAGUER (1998), «Estadística y probabilidad», en C. Azcárate y J. Deulofeu, *Matemáticas ESO, Guías Praxis para el profesorado*, Praxis, Barcelona.

BINGOLBALI, F., y E. BINGOLBALI (2019), «One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving», *Mathematics Education Research Journal*, 31, 237-257.

BURGOS, M., P. BELTRÁN-PELLICER y J. D. GODINO (2020), «La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria», *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27-49.

GAIRÍN, J. M., y J. SANCHO (2002), *Números y algoritmos,* Editorial Síntesis, Madrid.

GAULIN, C. (2001), «Tendencias actuales de la resolución de problemas», *Sigma,* 19, 51-63.

LOPES, J. B., y N. COSTA (1996), «Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas», *Enseñanza de las ciencias*, 14(1), 45-61.

MARTÍNEZ-JUSTE, S., J. M. MUÑOZ-ESCOLANO y A. M. OLLER-MARCÉN (2019), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.

PIERCE, R., y H. CHICK (2011), «Teachers' Beliefs About Statistics Education», en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, Dordrecht: Springer.

STANIC, G., y J. KILPATRICK (1989), «Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum» en R. Charles y E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA:, 1-22.

SULLIVAN, P., L. KNOTT y Y. YANG (2015), «The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning», en A. Watson y M. Ohtani (Eds), *Task design in mathematics education (ICMI Study 22)*, Springer.

Explorando el bloque 1: retos conjuntos

por
Víctor Pedraza Bea y Ricardo Alonso Liarte
(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo, Teruel)

El bloque 1 del currículo, «Procesos, métodos y actitudes en matemáticas», desgrana una larga lista de contenidos a tratar a lo largo del curso, que en muchas programaciones hemos ido diluyendo de manera muy general en el desarrollo del resto de bloques de contenido. Sin embargo, es posible que algunos, o muchos de ellos, se queden sin ser tratados de forma específica en algún momento del curso.

En nuestro centro, llevamos unos cuantos años trabajando en varios cursos este bloque de forma específica durante todo el curso, independientemente de lo que se pueda incidir en el resto de bloques. Para ello hemos establecido un programa de retos o desafíos, como les llamamos, de carácter quincenal. El alumnado los va recogiendo en un cuaderno dedicado exclusivamente a ellos o los presenta en formato digital en el caso de tener que trabajar con GeoGebra, hoja de cálculo u otro software. Cada quince días se recogen los cuadernos y se revisan y comentan los trabajos entregados. Todo ello forma parte de la evaluación, integrando de esta manera este primer bloque con el resto de contenidos.

Consideramos que las propuestas mantenidas en el tiempo, como estos retos o desafíos periódicos, junto con la confección de un cuaderno de clase específico para ellos, contribuyen a desarrollar actitudes como la constancia, la responsabilidad, la perseverancia… Es decir, contribuyen a la consecución de algunos de los estándares recogidos en este bloque como, por ejemplo, estos:

— Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
— Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
— Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.

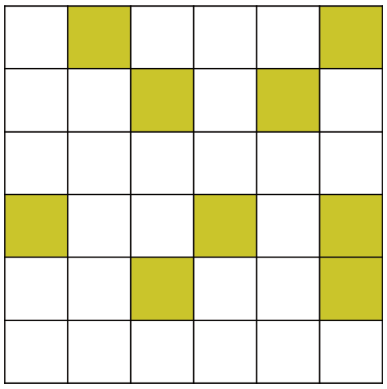
De esta forma de trabajo surgió la idea de realizar desafíos conjuntos entre grupos distintos, de manera que necesitasen colaborar entre ellos para conseguir resolver el reto lanzado. Así, elaboramos una propuesta para los alumnos de 1.º y 2.º de Bachillerato que les obligara a contactar entre ellos, puesto que habíamos detectado que no tenían ningún tipo de interacción y nos pareció importante, que en un centro pequeño como el nuestro, tuviesen más relación personal. Este objetivo no estamos muy seguros de haberlo conseguido, tuvieron que hablar entre ellos, pero la interacción fue bastante limitada.

Sin embargo, sí que se despertó curiosidad por la primera propuesta, y eso nos llevó a elaborar una segunda. A continuación las describimos.

Mensaje oculto

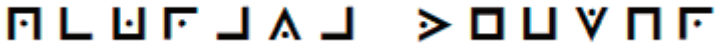
Nos pareció atractivo orientar este reto hacia los mensajes cifrados: descubrir al compañero al que solicitar la clave que permitiera descifrar un mensaje oculto.

Así pues, cada alumno recibía en un sobre una cuadrícula 9×9 con algunas celdas coloreadas y una hoja con la tarea que tenía que realizar para descifrar el mensaje que iba oculto en otra cuadrícula rellena con letras.



L	A	N	S	P	D
E	A	C	F	I	E
L	H	O	L	O	E
R	A	M	N	B	R
A	M	C	A	B	I
S	R	A	E	C	O

Evidentemente, la rejilla de colores que recibían no servía para encontrar su mensaje. Era necesario encontrar, en primer lugar, a la persona que tenía la que les servía como clave.



El nombre de dicha persona se encontraba, cómo no, encriptado, con un método del que se daban dos pistas que les permitiera llegar a él:

— Libertad, igualdad, fraternidad
— 60 Great Queen Street, Covent Garden, London WC2B 5AZ, England

La primera sensación de que habíamos conseguido captar la atención de nuestros alumnos, la tuvimos al día siguiente cuando, al entrar al instituto, nos mostraron su triunfo con amplias sonrisas de satisfacción por haber encontrado los nombres de los compañeros a los que pedir la cuadrícula.

Esta segunda parte del reto costó un poco más porque no tenían más información que las dos cuadrículas: la coloreada y la rellena de letras. Una vez encontraron que se trataba del *método de rejilla*, llegar a desencriptar el mensaje resultó una tarea sencilla.

Para preparar esta propuesta necesitábamos 21 frases de 36 letras que las conseguimos ajustando frases del libro de Omar Khayyam, *Rubaiyat*, y preparar 21 rejillas de colores distintas. Partiendo de la rejilla de la imagen, formada por subcuadrículas 3×3 numeradas del 1 al 9 y sucesivamente rotadas 90º, se iban seleccionando los números del 1 al 9 de distintas maneras, consiguiendo con ello rejillas totalmente distintas.

1	2	3	7	4	1
4	5	6	8	5	2
7	8	9	9	6	3
3	6	9	9	8	7
2	5	8	6	5	4
1	4	7	3	2	1

				4	
		6			
	8		9		
3					
2				5	
		7			1

Por último, con un poco de orden, establecimos para cada alumno, de qué compañero tenía que recibir la rejilla y a quién debería de darla, alternando alumnado de uno y otro curso.

¿Qué hay detrás?

En esta segunda propuesta, el objetivo que nos planteamos fue que conociesen personajes matemáticos de todos los tiempos. La resolución de unos problemas les iba dando pistas para acercarse a su personaje.

El material que pusimos a disposición de cada alumno fue el siguiente:

— Un documento con 4 problemas, distintos para cada uno, en la medida de lo posible variados, que abarcaban aspectos de bloques de contenidos diferentes.
— Una hoja con dos tablas: una de ellas con los nombres de todos los alumnos del bachillerato, de los dos cursos, numerados, y en la otra 10 filas con nombres de ciudades o con años.

ALUMNO	
1	Cristina
2	Irene
3	Óscar
4	Alba
5	Gabriel
6	Iván
7	Iván L
8	Sandra
9	Lucía
10	Asier
11	Sergio
12	Beatriz
13	Virginia
14	Andrea
15	Natalia
16	Javier
17	Sara
18	Nicolás
19	Ana
20	Laura
21	Carlos

CLAVE	
1	KÖNISBERG
2	PARIS
3	SELASCA
4	1540
5	1825
6	1897
7	HALLE
8	1918
9	1815
0	LISBOA

Cada alumno debía resolver los cuatro problemas. La solución de cada uno de ellos le daba los datos para encontrar al alumno a quien solicitar el número de la clave correcta. Es decir, cada alumno debía contactar con 4 compañeros que le darían el nombre de ciudades y años que le servirían para encontrar el dato oculto, que era un personaje matemático.

En este desafío tuvimos que preparar 44 problemas distintos, que los obtuvimos de diversas ediciones del *Concurso de Primavera de Matemáticas*, y localizar lugar y fecha de nacimiento y fallecimiento de 21 personajes matemáticos. La parte más laboriosa fue la asignación de alumnos y claves para que cada uno tuviese que solicitar los datos que necesitaba a 4 compañeros distintos.

En la imagen siguiente se muestra uno de los problemas. Su solución es 694/21, por tanto el alumno que lo resolvió debería pedir al alumno 21 (Carlos), la clave 4 (1540).

N°	Problema	Clave
1	En una ciudad, el cociente entre el número de mujeres y el de hombres es 11/10. Si la media de las edades de las mujeres es 34 años y la media de las edades de los hombres es 32 años, ¿cuál es la media de las edades de toda la población, en años?	*Alumno*: Denominador *Clave*: Unidades del numerador

Con los cuatro datos, dos ciudades y dos años, tenían información suficiente para encontrar de qué matemático o matemática se trataba. La actividad se completaba con una breve reseña del personaje y sus aportaciones a las matemáticas.

En ambos casos, en las dos actividades comentadas, debían recoger y detallar en su cuaderno del bloque 1, todo el proceso seguido para la realización de estos desafíos.

Si estos retos los proponemos como un juego colectivo, la preparación de los mismos resulta para nosotros también un juego, que mantenemos también durante este curso con un nuevo y diferente reto conjunto.

Referencias bibliográficas

KHAYYAM, O. (1999), *Rubaiyat*, Edicomunicación, Barcelona.
Concurso de Primavera de Matemáticas, Asociación Matemática Concurso de Primavera, Madrid.

Un problemita de probabilidad del siglo XVII

por

ANTONIO M. OLLER MARCÉN

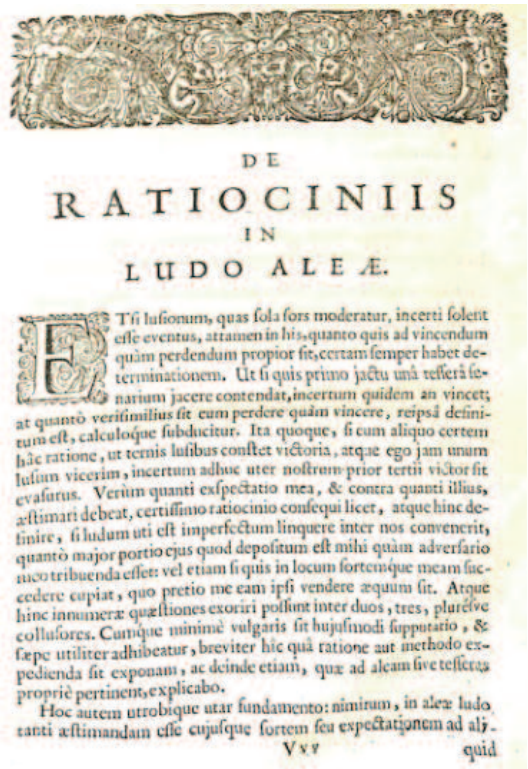
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Las evidencias históricas de que el juego acompaña al ser humano desde su origen son abundantes. Por ejemplo, existen documentos que hablan de versiones antiguas del ajedrez en el siglo VII, y el *go* aparece ya mencionado en las *Analectas* de Confucio hace unos 2 500 años. Respecto a los juegos de azar, ya se jugaba a las tabas en la Grecia y Roma clásicas y restos de juegos de tablero, quizás parecidos al parchís, se han encontrado en ruinas sumerias de unos 5 000 años de antigüedad.

Jugar es una de las actividades humanas que se encuentran en la base y motivan la aparición del pensamiento matemático. De hecho, tanto el azar como la estrategia, ingredientes que forman parte en proporción variable de casi cualquier juego que uno pueda imaginar, son susceptibles de ser abordados matemáticamente.

Pese a su antigüedad, el tratamiento sistemático de los juegos de azar tuvo que esperar hasta el siglo XVII. En el siglo anterior, Cardano compuso un *Liber de ludo aleæ* pero no fue publicado hasta 1663. Así, los primeros pasos importantes dirigidos a abordar lo que hoy llamaríamos cálculo de probabilidades se dieron en un intercambio epistolar entre Fermat y Pascal a mediados del siglo XVII. En esta correspondencia se cita la obra *Ars conmutationes*, escrita por el aragonés Sebastián de Rocafull y Español. Desafortunadamente, toda la obra matemática de Rocafull se perdió durante la Guerra de Sucesión, puesto que las tropas borbónicas incendiaron su casa natal en Báguena.

Ya en 1657 Christian Huygens publicó su *De ratiociniis in ludo aleæ*, que es el primer texto publicado (que se conserve) en el que se aborda el tema de forma sistemática.



DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verum quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, plurésve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hic quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid

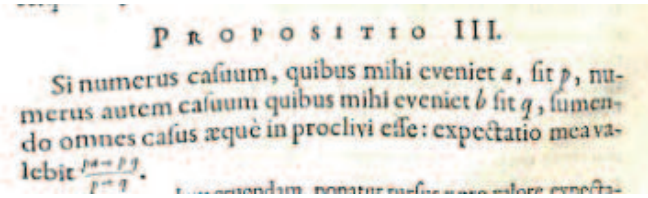
Vvv

La breve obra de Huygens, que ocupa tan solo 14 páginas, comienza con las siguientes palabras:

> Aunque en los juegos que solo dependen de la suerte, los sucesos son siempre inciertos, cuánto más cerca se está de ganar que de perder, siempre puede determinarse de modo cierto.

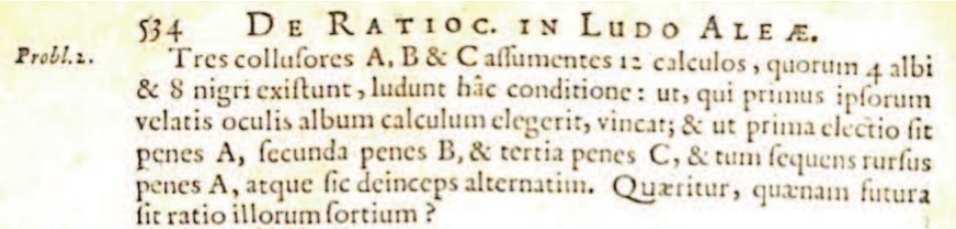
Como quizás pueda deducirse de estas palabras, la obra de Huygens introduce, en cierto modo, la idea de esperanza (*expectatio*). Así, por ejemplo, podemos encontrar lo siguiente:

> Si el número de casos en los que me sucede a es p, y el número de casos en los que me sucede b es q, suponiendo todos los casos igualmente proclives, mi esperanza valdrá $\frac{pa+qb}{p+q}$.


PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

El breve tratado termina con cinco problemas propuestos para su resolución (de alguno se da solo la solución numérica). Cabe señalar que esta práctica de incluir listas de problemas, muy común especialmente desde el siglo XIX, era extremadamente inusual en la época de Huygens.


534 DE RATIOC. IN LUDO ALEÆ.

Probl. 2. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

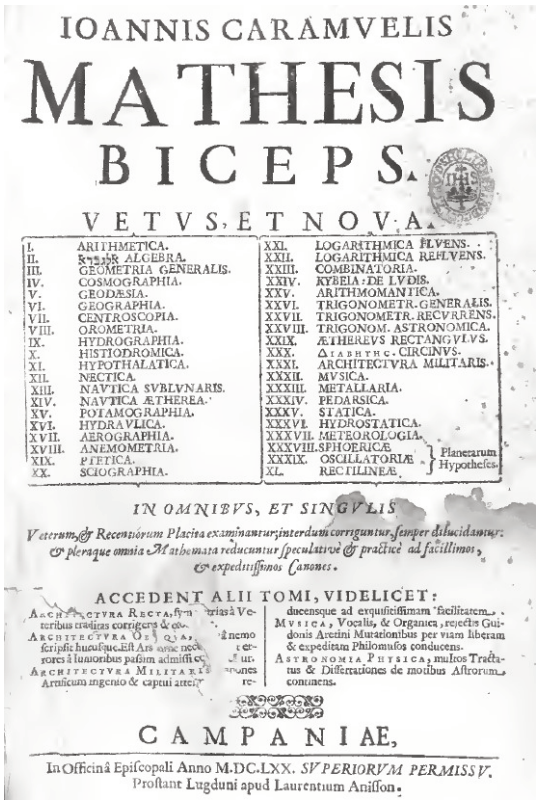
La traducción aproximada del latín sería esta:

> Tres compañeros de juego A, B y C tienen 12 piedrecillas de las cuales 4 son blancas y 8 negras. Juegan con la condición de que el primero que extraiga una piedra blanca con los ojos vendados, gana. Primero elige A, segundo B, tercero C y así sucesivamente. Pregunto, ¿cuáles serán las razones entre sus probabilidades de ganar?

Como sucede en tantas ocasiones con los problemas de matemáticas (lo que quizás debería hacernos reflexionar un poco) el enunciado no aparenta sus 350 años de edad. Sin embargo, la pregunta que plantea Huygens sí que se aparta quizás de lo que se esperaría en un problema actual. No se pregunta por la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores, sino de la razón entre dichas probabilidades. Evidentemente, ambas cuestiones son equivalentes (ya que las probabilidades suman 1) pero el matiz es importante. De hecho, en el contexto de un juego de azar entre varios jugadores, lo importante no es tanto la probabilidad de ganar de cada uno independientemente sino la comparación (multiplicativa) entre dichas probabilidades. Sobre esto volveremos más adelante, cuando resolvamos el problema.

Pocos años después de la obra de Huygens, en 1670, se publicó en Campania un libro titulado *Mathesis biceps*. Su autor fue el cisterciense español Juan Caramuel Lobkowitz, nacido en Madrid en 1606. Entre los numerosos contenidos que abarca la obra, de casi 2 000 páginas, encontramos un capítulo de 24 páginas titulado *Kybeia* y dedicado al azar.

El texto de Caramuel contiene gran cantidad de material original. Por ejemplo, realiza el análisis de un juego popular en la época en España e Italia (según dice el autor) denominado *pasa-diez*. Sin embargo, la segunda mitad consiste en una transcripción literal de la obra de Huygens (que atribuye por error a un astrónomo danés) que acabamos de comentar. Hay que decir, no obstante, que también se incluyen dos páginas de comentarios al hilo del texto de Huygens, que demuestran claramente que Caramuel no se limitó a reproducir el material.



IOANNIS CARAMVELIS

MATHESIS BICEPS.

VETVS, ET NOVA.

I.	ARITHMETICA.	XXI.	LOGARITHMICA FLVENS.
II.	ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ALGEBRA.	XXII.	LOGARITHMICA REFLVENS.
III.	GEOMETRIA GENERALIS.	XXIII.	COMBINATORIA.
IV.	COSMOGRAPHIA.	XXIV.	KYBEIA: DE LVDIS.
V.	GEODÆSIA.	XXV.	ARITHMOMANTICA.
VI.	GEOGRAPHIA.	XXVI.	TRIGONOMETR. GENERALIS.
VII.	CENTROSCOPIA.	XXVII.	TRIGONOMETR. RECVRRENS.
VIII.	OROMETRIA.	XXVIII.	TRIGONOM. ASTRONOMICA.
IX.	HYDROGRAPHIA.	XXIX.	ÆTHEREVS RECTANGVLVS.
X.	HISTIODROMICA.	XXX.	ΔΙΑΒΗΤΗΣ. CIRCINVS.
XI.	HYPOTHALATICA.	XXXI.	ARCHITECTVRA MILITARIS.
XII.	NECTICA.	XXXII.	MVSICA.
XIII.	NAVTICA SVBLVNARIS.	XXXIII.	METALLARIA.
XIV.	NAVTICA ÆTHEREA.	XXXIV.	PEDARSICA.
XV.	POTAMOGRAPHIA.	XXXV.	STATICA.
XVI.	HYDRAVLICA.	XXXVI.	HYDROSTATICA.
XVII.	AEROGRAPHIA.	XXXVII.	METEOROLOGIA.
XVIII.	ANEMOMETRIA.	XXXVIII.	SPHOERICÆ
XIX.	PYRETICA.	XXXIX.	OSCILLATORIÆ } Planetarum Hypotheses.
XX.	SCIOGRAPHIA.	XL.	RECTILINEÆ.

IN OMNIBVS, ET SINGVLIS

Veterum, & Recentiorum Placita examinantur; interdum corriguntur, semper dilucidantur: & pleraque omnia Mathemata reducuntur speculativè & practicè ad facillimos, & expeditissimos Canones.

ACCEDENT ALII TOMI, VIDELICET:

ARCHITECTVRA RECTA, sym[illegible] riasâ Veteribus traditas corrigens & ge[illegible]

ARCHITECTVRA O[illegible] QVA, [illegible] nemo scripsit huicusque. Est Ars omnes [illegible] ter-rores à luminibus passim admissi co[illegible] ur.

ARCHITECTVRA MILITARIS [illegible] nes Armicum ingenio & captui atte[illegible] re-ducensque ad exquisitissimam facilitatem.

MVSICA, Vocalis, & Organica, rejectis Guidonis Aretini Mutationibus per viam liberam & expeditam Philomusos conducens.

ASTRONOMIA PHYSICA, multos Tractatus & Dissertationes de motibus Astrorum continens.

CAMPANIAE,

In Officinâ Episcopali Anno M.DC.LXX. *SVPERIORVM PERMISSV.*
Prostant Lugduni apud Laurentium Anisson.

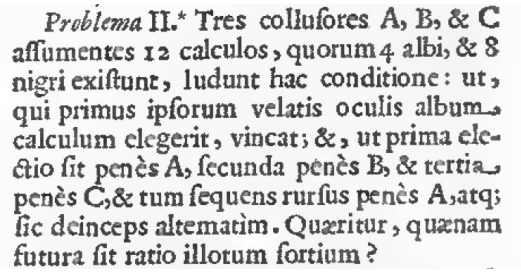
La mayor parte de estos comentarios son muy interesantes, por cuanto involucran reflexiones relacionadas con la naturaleza del concepto de probabilidad en un momento en que este aún no estaba bien establecido. Por ejemplo, encontramos comentarios sobre la influencia de la forma sobre la equiprobabilidad de los resultados de lanzamientos:

> Si jugamos con un dado, todos los números son igualmente posibles. Si usamos una taba, cuya figura es diversa, algunas partes destacan.

Y también sobre los valores más probables al lanzar varios dados:

> Si usamos dos dados, el número óptimo es 7 […] Si finalmente usamos tres dados, los números óptimos son 10 y 11.

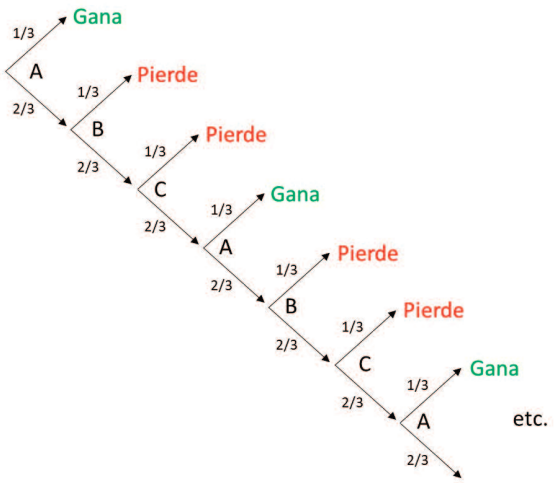
Como hemos dicho, en el libro de Caramuel se transcriben también los cinco problemas finales de Huygens y, en particular el que hemos presentado antes.



Problema II.* Tres collusores A, B, & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri existunt, ludunt hac conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; &, ut prima electio sit penès A, secunda penès B, & tertia penès C, & tum sequens rursus penès A, atq; sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Aunque no es lo que pide el autor, vamos a resolverlo calculando directamente cuál es la probabilidad de que cada jugador gane el juego. Además, suponemos que las extracciones son con reemplazamiento. Huygens no lo indica, pero se presupone en toda su obra que siempre es así. Quizás el lector quiera detenerse aquí y tratar de calcular estas probabilidades por sus propios medios.

Comenzamos por el primer jugador. La probabilidad de sacar una bola blanca es 1/3 y la probabilidad de sacar una bola negra es 2/3. El siguiente diagrama de árbol ilustra la situación desde el punto de vista del jugador A.



De este modo, la probabilidad de que gane el jugador A es

$$p(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^n+\ldots=\frac{9}{19}.$$

Se pueden hacer los árboles correspondientes a los jugadores B y C y obtener de forma similar que:

$$p(B)=\frac{6}{19},\quad p(C)=\frac{4}{19}.$$

Esto resuelve el problema completamente. Sin embargo, si abordamos la pregunta original que realmente plantea Huygens, hay una forma mucho más rápida y directa de resolverlo. Recordemos que Huygens (y Caramuel) no piden calcular la probabilidad de que gane cada jugador, sino las razones entre ellas.

El modo de razonar esta sugerido en el diagrama, pero se puede abordar directamente teniendo en cuenta lo siguiente. Si el primer jugador pierde, el segundo pasa a ocupar el papel del primero. Como el primero pierde 2/3 de las veces, el segundo se convierte en el primero 2/3 de las veces y esa es justamente la razón entre sus probabilidades de ganar. Del mismo modo, para que el tercero pase a ser el primero, los dos anteriores deben perder, lo que sucede 4/9 de las veces. Como hemos comentado antes, esta discusión nos permite entender completamente el juego, sin necesidad de calcular las probabilidades individuales. Nos basta con saber que esperamos que de cada 19 partidas jugadas, A ganará 9, B ganará 6 y C ganará 4.

Por otro lado, este enfoque abre la puerta a introducir el lenguaje de la proporcionalidad aritmética en el ámbito de la probabilidad. Por ejemplo, podemos pensar (de nuevo con un cierto abuso del lenguaje) que la probabilidad de ganar de un jugador representa «las veces que gana ese jugador por cada vez que se juega una partida». Así, retomando la última frase del párrafo anterior, de cada partida jugada, esperamos que A ganará 9/19, B ganará 6/19 y C ganará 4/19, que son las probabilidades que hemos calculado antes por otros medios más expeditivos.

Para terminar, planteo aquí dos de los otros cuatro problemas que cierran la obra de Huygens. En ambos, el propio autor da la solución numérica (de la que podemos fiarnos, o no). El lector interesado puede tratar de resolverlos como mejor sepa.

Problema III.
A acuerda con B que, de 40 cartas, de las que 10 son de cada palo, sacará 4 de forma que todas serán de diferente palo. Y se ve que sus probabilidades de ganar son de 1 000 a 8 139.

Problema V.
A y B tienen 12 monedas cada uno y juegan con 3 dados bajo la siguiente condición. Si salen 11 puntos, A le dará a B una moneda, pero si salen 14 puntos, entonces B le dará a A una moneda; de modo que ganará el juego aquel que se quede con todas las monedas. Las probabilidades de victoria respectivas están en la razón de 244 140 625 a 282 429 536 481.

La mirada en el espejo

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

En artículos anteriores hemos abordado cómo apoyar con GeoGebra varios aspectos del aprendizaje de la geometría, como las posiciones absolutas y relativas, la orientación en el plano o el reconocimiento de las formas geométricas básicas.

Todos estos contenidos, como ya indicamos en su momento, aparecen claramente en el currículo de Educación Infantil, tanto del Ministerio como del Gobierno de Aragón.

Sin embargo, ambas normativas obvian los contenidos referidos a las transformaciones geométricas, es decir, los movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.

Chamorro (2011), en relación a esta ausencia del currículo de Infantil, considera que es «muy difícil que el alumno de esta edad pueda representarse el espacio sin ayuda del movimiento, primero realizado y después interiorizado, pudiéndose llegar a una codificación incipiente que dé pie a la apropiación de un vocabulario, que de otra manera es aprendido sin sentido por el alumno».

Haciendo propias estas reflexiones, nos centraremos en esta parte de la geometría, las transformaciones de las figuras que, aunque no aparezca en el currículo, sí que se trabaja con frecuencia en las aulas por su relación con muchos aspectos de la realidad en que los niños están inmersos.

De los tres posibles movimientos, nos centraremos en las simetrías, y en particular en la simetría axial, dada la facilidad de trabajar con ellas de forma gráfica, y las posibilidades que en este sentido ofrece el programa GeoGebra.

Como en otras ocasiones, insistimos en los beneficios de utilizar material manipulable para abordar estos contenidos. Sin embargo, el uso de aplicaciones GeoGebra de forma colectiva mediante la pizarra digital interactiva puede fomentar el intercambio de pareceres, la reflexión y la puesta en cuestión de las propias afirmaciones.

Las actividades que describimos a continuación abordan las simetrías con dos formas de trabajar diferentes: completar una figura a modo de un puzle y completar la mitad de un dibujo simétrico con trazos.

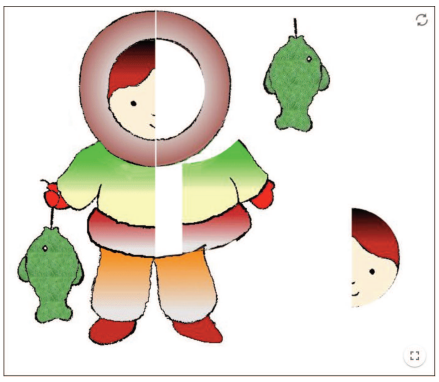
Todo el material se encuentra recogido en el libro GeoGebra al que se puede acceder en el siguiente enlace.

Pasamos a realizar una breve descripción de todas ellas, manteniendo un orden de menor a mayor dificultad en cada parte.

Simetría con PIEZAS

Las de la primera colección responden al modelo de un puzle. Los alumnos deben reproducir la mitad de una figura (o la figura completa) a base de colocar partes de la misma, de modo que el resultado sea simétrico. La componen cuatro actividades:

Puzle esquimal

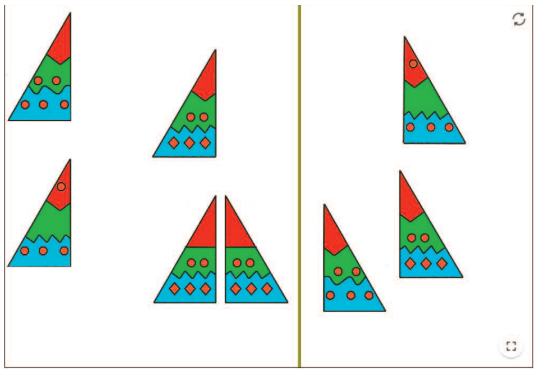


Se trata de una sencilla actividad en la que aparece la mitad del cuerpo de un esquimal que ha pescado. La otra mitad está descompuesta en piezas que los niños deben colocar de manera que aparezca un cuerpo completo y simétrico.

Por su facilidad, es idónea para el trabajo individual en un equipo de tipo tablet. Aunque no dispone de una autocorrección automáticas, la formación correcta del cuerpo del esquimal es suficiente confirmación de que la actividad se ha realizado bien, permitiendo así cierta autonomía en los alumnos.

En el siguiente enlace se puede ver un vídeo de su uso en el aula con esta configuración, trabajando de forma individualizada con un niño con necesidades educativas especiales.

Une los tipis



En esta actividad la dificultad es mayor que en la propuesta anterior, ya que las figuras tienen un aspecto geométrico más abstracto y hay gran similitud entre las distintas piezas.

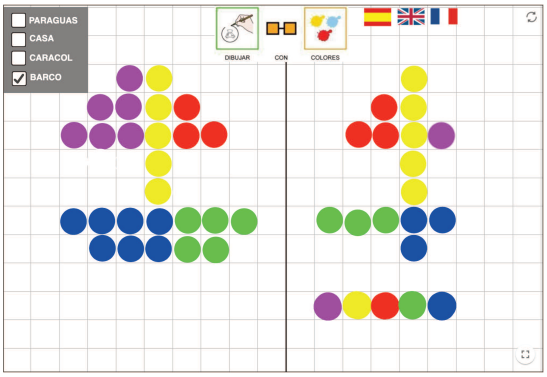
En ella se presenta una colección de triángulos rectángulos decorados con formas de colores. Dos de ellos, unidos, conforman un tipi (tienda o vivienda típica de los indios americanos).

El desarrollo es sencillo: La pantalla está dividida en dos partes. Las piezas de la izquierda son fijas, y los alumnos deben de formar los tipis correctamente desplazando la mitad situada a la derecha y colocándola justo al lado de aquella fija que es su simétrica.

Los colores y la decoración de las tiendas son similares, lo que da cierta dificultad al ejercicio y exige atención por parte de los niños.

Pinchos de colores

La actividad propone un dibujo realizado con círculos de colores (similar al popular juego de los pinchos) y un espacio vacío a la derecha con círculos móviles. En un principio, se puede jugar a reproducir el dibujo tal y como es, para después, mediante las preguntas e indicaciones oportunas, acabar realizando el simétrico respecto del eje de simetría trazado en el centro de la pantalla.

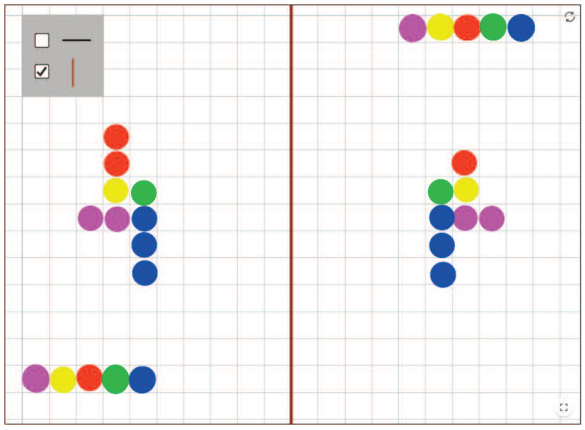


Los dibujos disponibles (paraguas, casa, caracol y barco) se seleccionan mediante casillas de verificación, y se puede cambiar el idioma en que aparecen estas palabras mediante las banderitas (castellano, inglés y francés).

El funcionamiento es sencillo: se selecciona el idioma deseado y la casilla de la figura que deseamos realizar. Entonces, siguiendo el modelo, se deben arrastrar los círculos de los distintos colores, que aparecen abajo a la derecha, hasta el sitio que les corresponda para reproducir la misma imagen o la simétrica.

Por otra parte se puede promover la observación sobre la existencia de simetrías en los dibujos iniciales, y plantear otro tipo de actividades, como el recuento de círculos de distintos colores, comparación del número de estos, viendo de qué color hay más, etc.

Juego de simetría



Siguiendo el modelo de la actividad anterior, este escenario permite realizar dibujos libres con los círculos de colores. Se pueden realizar, tanto dibujos simétricos, como el trazado del simétrico de un dibujo como si se viera en el espejo.

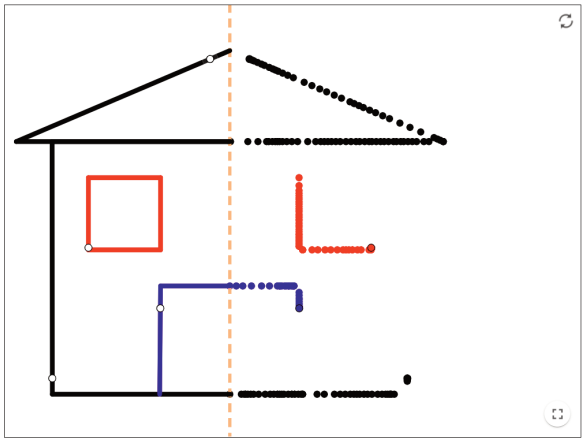
Para afianzar el concepto de simetría se propone también trabajar con un eje horizontal, aunque es posible que los niños más pequeños no sean capaces de seguir una actividad así.

El uso de la cuadrícula facilita el recuento de unidades de distancia que asegura la simetría, suponiendo una introducción a la medida de distancias con unidades arbitrarias, incluso un acercamiento a la definición más estricta de simetría.

Simetrías con TRAZOS

En esta colección de actividades los niños deben completar la mitad de un dibujo a base de trazos, con lo que, además de la simetría, se está trabajando la motricidad fina y el control del trazo. Comentamos a continuación cuatro propuestas de trabajo.

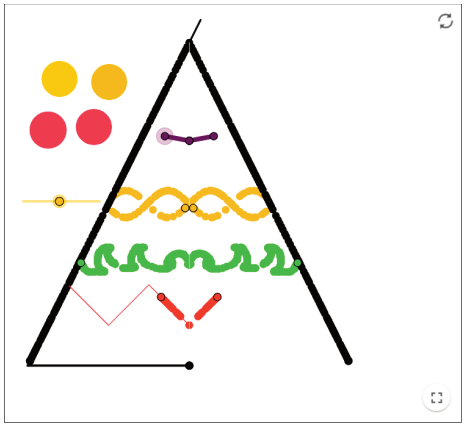
Casa simétrica



En esta propuesta se presenta el dibujo de media casa realizado con trazos de colores, y una línea discontinua vertical que representa el eje de simetría o el espejo que permite visualizar la figura entera. Para completarla, cada una de las partes dibujadas de la casa puede recorrerse con un punto: el tejado, el suelo y pared lateral, la ventana y la puerta. Al ir desplazando uno de esos puntos sobre los segmentos a los que está anclado (en la mitad dibujada), se va «copiando» en la otra parte, de manera que se consigue completar el dibujo de la casa al trazar la mitad simétrica que faltaba.El botón de actualización situado en la parte superior derecha permite volver a realizar la actividad.

En el siguiente video se puede ver una puesta en práctica en el aula de esta propuesta. Resulta una actividad muy satisfactoria para los niños por el efecto «mágico» del trazado simétrico.

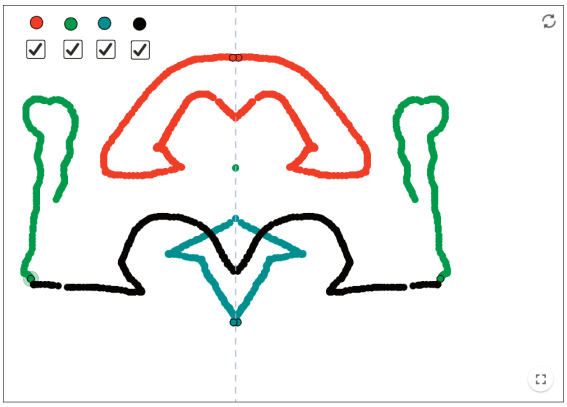
Tienda simétrica



En esta actividad interactiva se muestra una propuesta similar a la anterior: puntos con los que se recorren los segmentos que forman la mitad de la tienda, con los se completa el dibujo de un típico tipi indio en la parte de la derecha. Además, se muestran cuatro puntos con los que se pueden realizar trazos distintos. Uno de ellos, el morado, dibuja un segmento. El verde permite realizar un dibujo libre, introduciendo un punto creativo en la actividad. Para poner en marcha el amarillo se dispone de un deslizador que al moverlo va dibujando líneas curvas que se entrelazan sobre el tipi. Y el punto rojo, al igual que los negros, repite la misma forma en la parte derecha al recorrer la línea poligonal. Además, se ofrecen cuatro círculos (dos amarillos y dos rojos) para que los niños completen la decoración de la tienda. La colocación de estos elementos nos mostrará si realmente están comprendiendo el concepto de simetría, puesto que debe atender, no solo a las formas sino también a los colores.

El siguiente video muestra el uso de esta actividad en el aula.

Tu dibujo simétrico

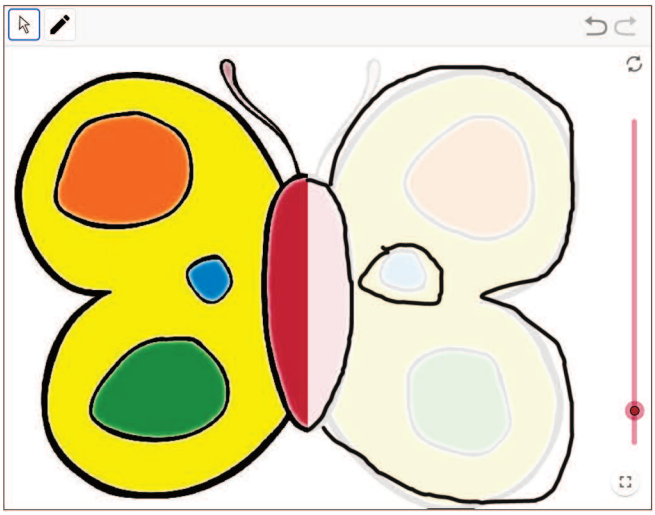


Esta actividad, complementaria de las anteriores, muestra un escenario similar, pero en el que no aparecen más que cuatro puntos que permiten dibujar líneas libremente. Cada trazo es de un color y, al tiempo que se trazan, aparecen las líneas simétricas correspondientes al otro lado del eje de simetría. Permite desarrollar más la creatividad de los alumnos al tiempo que se facilita la comprensión de la simetría gráfica, al ser esta perfecta, al margen de los trazos de los niños.

Para que los puntos «dibujen» la casilla de verificación correspondiente al color debe estar activada. Y la desactivaremos para desplazar los puntos sin dibujar, buscando un nuevo punto de inicio del trazo.

Completa la mariposa

Esta última actividad se diferencia de las anteriores en que, si hasta ahora el trazado de la parte simétrica era automático a partir del dibujo inicial, en este caso los niños deben trazar a mano alzada la mitad de un dibujo simétrico, teniendo a la vista la otra mitad. Se trata de una vistosa mariposa de colores.



Por si la actividad resulta muy difícil, mediante una barra deslizadora se puede mostrar con distintos grados de transparencia, la parte que falta. Así los niños solo tienen que repasarla.

Se dispone de un ejemplo de aplicación en el aula en el siguiente video.

Todos los días, al levantarse, los niños interpretan la simetría de su propio cuerpo en el espejo. Con estas actividades proponemos redirigir esa mirada, que aún no tiene sentido matemático, hacia una progresiva comprensión de este concepto geométrico.

Referencias bibliográficas

Chamorro, C. (2011), «La mejora del aprendizaje del área lógico-matemática desde el análisis del currículum de Educación Infantil», *Educatio Siglo XXI*, Vol. 29 nº 2, 23-40.

Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón (2008), *Orden de 10 de marzo por la que se aprueba el currículo de la Educación Infantil*, BOA del 14-04-2008.

Ministerio de Educación y Ciencia, ECI/3960/2007, *Orden de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil*.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Septiembre de 2021
ISSN: 2386-8821e

BY NC SA