Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 43
Noviembre de 2021

Después de un par de números sin hacerla, retomamos esta parte de *Entorno Abierto* que denominamos «Crónica» [de la SAPM]. En números anteriores había poca novedad que contar sobre la Sociedad, pero este mes de noviembre ha sido nuestra asamblea anual y podemos informar de alguna novedad.

Uno de los aspectos que se suele tratar en las asambleas es el número de asociados. Después de varios años *creciendo* con moderación, nos hemos estancado un poco. Los asistentes coincidimos en la importancia de que seamos más los asociados y, de paso, que más personas se involucren en nuestras actividades (las nuevas y las antiguas). Sin duda, nuestro mejor activo somos nosotros mismos y, por tanto, constituimos la mejor *publicidad* que nos podemos hacer entre compañeros de departamento o amigos de otros centros.

Aunque ya lo difundimos por correo electrónico (en breves contestamos a las personas que nos han escrito), aprovecho para recordar uno de los retos que nos hemos planteado este curso. Queremos organizar una semana de las matemáticas en la calle, en Aragón. La idea, bosquejada, es que diferentes centros educativos saquen un día unas mesas a la calle, en la puerta del propio centro, con algunas actividades matemáticas a cargo de las cuales habrá alumnos, que las explicarán a quien se acerque a las mesas. Idealmente tendríamos que cubrir los 5 días en las tres provincias. Es decir, el lunes habrá un centro en la calle en Huesca, otro en Teruel y un tercero en Zaragoza. El martes lo mismo. Así sucesivamente, hasta el sábado que haríamos en Teruel capital el acto final de la semana. Esta semana la celebraremos en torno al 12 de mayo que es el día escolar de las matemáticas: del 9 al 14 de mayo. La actividad es ambiciosa de cara al futuro, aunque para este curso nos *conformaremos* si nos sale algo relativamente pequeño. Al estar en su primer inicio el formato con respecto a duración, ubicaciones, etc., está totalmente abierto. Entre todos los participantes nos ayudaremos.

Otra novedad importante es que este curso la FESPM va a convocar la primera olimpiada nacional para alumnos de 4.º de ESO (y 3.º). La SAPM vamos a participar y ya hay dos compañeros que se han ofrecido a ser los coordinadores: Juan Mayo y M.ª Jesús Ramón. Otro cambio en el *equipo olímpico* es que José Miguel Rubio sustituye a Ricardo Alonso al frente de la web.

Para finalizar, quería reiterar la importancia de *alimentar* este boletín. Nos parece de una gran importancia que podamos compartir nuestras experiencias de aula: ese es el principal objetivo de *Entorno Abierto.* Aunque no es el principal argumento, recuerdo que cumple los requisitos para que sea puntuable en los baremos correspondiente (ISSN, registro en bases de datos...). Eso sí, si el artículo es finalmente merecedor de puntuación, lo deciden las comisiones evaluadoras.

Σrio Interactivo

Seminario Federal *Geogebra en Educación Infantil y Primaria*
Un acercamiento didáctico al tratamiento de funciones en Secundaria
Descubriendo las simetrías del mundo con ojos infantiles
Juegos de mesa como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas
Ecuaciones en 2.º ESO desde la Historia de las Matemáticas
Estrategias de resolución en un problema sobre probabilidad condicional en la XXIX Olimpiada aragonesa
Operaciones básicas: sumas y restas con recuentos
¿Es ¼ mayor o menor que ½? Dudas en el Siglo de Oro español

únete
a la SAPM
click

Seminario Federal *GeoGebra en Educación Infantil y Primaria*

por
Daniel Sierra Ruiz
(CPI El Espartidero, Zaragoza)

En octubre de 1997, la SAPM organizó en Jaca, por encargo de la FESPM, el *Seminario para el estudio de los nuevos Bachilleratos y su coordinación con los nuevos planes de la Universidad*. Han tenido que pasar veinticuatro años para que organicemos un segundo seminario. A esta distancia temporal, se le une tanto la distancia geográfica del lugar de celebración, como la que hay entre las etapas educativas abordadas y los contenidos tratados.

Hace algo más de 10 años, se reunieron en Calamocha Ricardo Alonso, Ana Isabel Blasco y Carmen Soguero, e iniciaron una andadura en la que continúan a día de hoy. Empezaron a preparar actividades en las que unían GeoGebra, pizarra digital interactiva, matemáticas y educación infantil. En ese momento eran los únicos que estaban trabajando con GeoGebra en actividades para educación infantil (se puede acceder a los materiales que han elaborado a lo largo de este tiempo en <https://matematicinfantil.catedu.es/>).

Así que es natural que fueran ellos mismos los que propusieran a la FESPM que se convocara el seminario *GeoGebra en Educación Infantil y Primaria*, y de agradecer que se ofrecieran para ser quienes lo organizaran en Teruel. Por nuestra parte, valoramos muy positivamente que la FESPM aceptara la propuesta y se animara a celebrar un seminario fuera de los enclaves habituales.

Desde que GeoGebra se hizo popular ha estado presente de una forma u otra en congresos, jornadas, seminarios, etc., que congreguen a profesorado de matemáticas. En la mayoría de las ocasiones lo que se busca es que los asistentes aprendan a elaborar sus propios *applets*. Como Alonso, Blasco y Soguero han podido comprobar, este planteamiento no suele tener los efectos deseados; más bien los principiantes suelen quedar *abrumados* por la pericia de algunos ponentes y se desaniman. Sin embargo, existen una gran cantidad de materiales ya preparados para llevar al aula sin necesidad de tener conocimientos de GeoGebra. Así que, en esta ocasión, el seminario tenía como uno de sus objetivos fundamentales incitar al uso de los materiales existentes.

Este enfoque logró reunir en Teruel del 17 al 19 de noviembre pasado a profesorado del grado de magisterio,de secundaria, primaria e infantil de Andalucía, Aragón, Baleares, Canarias, Cantabria, Castilla-La Mancha, Cataluña, Galicia y Madrid. Desde la SAPM queremos agradecer a estas personas la asistencia, el interés mostrado y el trabajo realizado durante los tres días.

Las actividades empezaron el viernes a las 16.15 h con la *prescriptiva* inauguración. Pudimos contar con presencia de representantes de las diferentes entidades colaboradoras. Entre todas dotaron al seminario de espacios y materiales necesarios para su celebración. Debemos agradecer vehementemente al CEIP Ensanche (y, en consecuencia, al ayuntamiento de Teruel) que pusiera a nuestra disposición sus instalaciones para las sesiones de sábado y domingo. Fueron los primeros que contestaron afirmativamente a la petición formulada por Carmen Soguero en nombre de la FESPM y la SAPM. Gracias al decanato de la Facultad de Ciencias Sociales y Humanidades de Teruel, tanto la citada inauguración como las posteriores charlas del viernes, se pudieron realizar en el campus de la Universidad de Zaragoza. El grupo de entidades colaboradoras se completó con la Diputación de Teruel.

El título de la primera conferencia, *Experiencias de uso de GeoGebra en aulas de Ed. Infantil y Ed. Primaria,* es suficientemente descriptivo. Ángel Antonio García Marrero (Escuelas Pías, Tenerife) y Ana Isabel Blasco Nuño (CEIP Ricardo Mallén, Calamocha, Teruel) mostraron qué se puede llegar a hacer en primaria e infantil con algunos de los *applets* creados con GeoGebra. Incluso nos sorprendimos del nivel de manejo del programa que pueden llegar a tener algunos alumnos aunque solo les demos unas pocas instrucciones.

A continuación, Jesús Serrano Higueras (CEIP Tomé y Orgaz, Casarrubuelos , Madrid) nos hizo una *visita guiada* a *Sitios web con recursos GeoGebra disponibles.* Fue una primera introducción para aprender cómo y, sobre todo, dónde buscar los recursos más interesantes; se estaba allanando el camino para la jornada del sábado.

La mañana del sábado la dedicamos al taller *Diseño de secuencias didácticas para Infantil y Primaria con recursos GeoGebra. Descarga de recursos y creación de libros*. A los asistentes nos iba a tocar trabajar, pero no sin cualificadas indicaciones. Empezó M.ª Cristina Naya Riveiro (Universidad de Santiago de Compostela), que explicó cómo se puede llevar a cabo el proceso de diseñar una secuencia didáctica, mostrando diferentes ejemplos. A continuación tomó la palabra Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo, Teruel). Aprendimos a descargarnos recursos ya existentes (a citar correctamente la autoría de la persona *copiada*), a hacer pequeñas modificaciones y a ponerlos en forma de secuencia en un libro de GeoGebra creado por nosotros. Con todas estas herramientas, los *seminaristas* nos juntamos por pequeños grupos de afinidad para elaborar nuestra propia secuencia didáctica, usando recursos ya existentes.

El inicio de la tarde sirvió para terminar el trabajo empezado por la mañana y, a continuación, los grupos de trabajo explicaron al resto de asistentes las diferentes secuencias que se habían preparado durante ese día. Después, Carmen Soguero Pamplona (Universidad de Zaragoza) nos hizo una visita virtual a Teruel, bajo el título *Elementos del entorno para diseñar actividades GeoGebra*. Quedó claro que la ciudad en la que estábamos tenía un buen número de lugares susceptibles de ser aprovechados en las clases de matemáticas. Obviamente, si prestamos atención, en todas nuestras localidades puede ocurrir lo mismo.

El domingo iniciamos las actividades un poquito más tarde (9.30 h). Nuevamente tomó la palabra Ricardo Alonso para mostrarnos cómo funciona el *Classroom de GeoGebra*. Una de las principales ventajas es que se puede observar *en directo* lo que van haciendo cada uno de nuestros alumnos con las actividades que les propongamos. Como última actividad puramente formativa Bernat Ancochea Millet (Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques) nos dio unas pinceladas (cortas pero emocionantes) de cómo funciona el módulo 3D de GeoGebra.

La comunidad GeoGebra ha sido desde su inicio abierta y colaborativa. Y cada vez es más extensa. Los recursos abarcan casi cualquier aspecto de la educación matemática que uno pueda imaginar, con la ventaja de que los autores los comparten libremente en <https://www.geogebra.org/>. Como ha quedado de manifiesto, el seminario tuvo como razón de ser la elaboración de secuencias didácticas. En el tramo final del seminario, los asistentes valoraron su utilidad y estuvieron de acuerdo en que dentro de la FESPM se debería buscar una manera de dar continuidad al trabajo realizado en esos tres fructíferos días.

Un acercamiento didáctico al tratamiento de funciones en Secundaria

por

Sara Embid Solano

(Egresada del Máster de Profesorado de la Universidad de Zaragoza)

Si uno reflexiona sobre cómo fue introducido en el concepto matemático de función en los últimos cursos de la ESO —o inicios de BUP— es probable que a su mente solo le lleguen atisbos de una idea ingeniosa pero altamente abstracta. A pesar de su apariencia simple, las funciones resultan muy complicadas de entender y esta complicación se agrava si las introducimos con la definición moderna de Peter Dirichlet (1837) como correspondencia unívoca entre conjuntos :

> *y* es función de *x* si a cada valor de *x* corresponde un valor completamente determinado de *y*; además, no es importante el método con el cual se establece la correspondencia señalada.

La exploración del concepto basada en esta noción formal supone un alto grado de generalización y abstracción difícilmente alcanzable por el alumnado de Secundaria. Sierpinska (1988) señala que definiciones como esa ocultan la verdadera naturaleza del concepto, conllevando un error didáctico, una inversión anti-didáctica. La conceptualización de función aceptada, desde un punto de vista didáctico, sigue la línea de Sierra-Vázquez, González-Astudillo y López-Esteban (1998) con representaciones en diferentes registros y una aproximación más informal.

Punto de partida: primera sesión

Como las mentes de los alumnos no son lienzos en blanco y estos van reconstruyendo los significados conceptuales sobre la base de otros significados ya construidos previamente, el punto de partida de cualquier propuesta didáctica debe pasar por estos conocimientos previos (Miras, 1993). Incidiendo en este aspecto, Ball, Thames y Phelps (2008) señalan la importancia de un profesor que pueda dar un sentido matemático al trabajo de los estudiantes. La primera sesión que proponemos consta de dos partes diferenciadas:

— Cuéntame algo que sepas relacionado con las funciones (acorde con tu nivel).
— Propón un problema sobre funciones que te parezca realista.

Esta propuesta se inspira en un artículo de Mercado (2007) donde se propone un tipo de evaluación inicial que permite buscar nuevas formas de enfocar los contenidos:

> Estoy seguro de que todo el mundo sabe algo relacionado con las matemáticas y de que a diario se os plantean problemas que tienen que ver con ellas. Por eso, en una cara de un folio me vais a contar algo que sepáis de matemáticas (acorde con vuestro nivel) y en la otra cara me vais a proponer un problema.

El análisis pormenorizado de resultados permitirá ajustar la planificación posterior, si bien sería recomendable seguir un esquema constructivista respaldado por las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Los contenidos de los que se ocupa la unidad didáctica de funciones ya han sido trabajados en cursos anteriores, lo que debería inhibir el «bloqueo de la hoja en blanco» y mostrar estudiantes que, al menos, intentan aproximaciones iniciales a las tareas pedidas.

Trabajo en el aula: segunda sesión

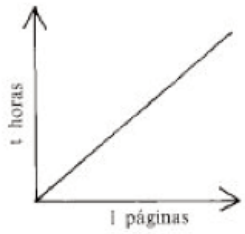
Asumiendo que, al igual que Wheatley (1991), el conocimiento matemático es reconstruido por cada individuo y es una manifestación de experiencias personales que provienen tanto de su mundo cotidiano como de la experiencia escolar, escogemos uno de los problemas propuestos por el Shell Centre for Mathematical Education (1990: 200). La siguiente imagen ilustra su contenido:

Un grupo de amigos, aburridos y sin dinero, quieren sacar algún dinero elaborando y vendiendo su propia revista casera. Un profesor amable se ofrece a ayudar dando facilidades y papel gratis, al menos para los primeros números.

1. a) Haz una lista de todas las decisiones importantes que deberían tomar. Aquí tienes tres para empezar:

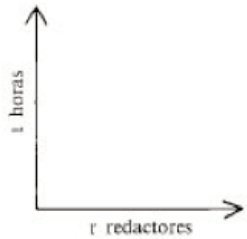
   ¿Cuál debe ser el tamaño de la revista? (l páginas).
   ¿Cuántos redactores harán falta? (r redactores)
   ¿Cuánto tiempo llevará escribirla? (t horas)

   b) Algunas de las cuestiones de tu lista dependerán de otras. Por ejemplo: Para un número fijo de personas, cuanto más larga sea la revista más se tardará en escribirla,



   Para un tamaño fijo de revista, cuantos más redactores haya...

   Completa el informe y haz una gráfica para ilustrarlo.



   Escribe otras relaciones que veas y haz gráficas en cada caso.

2. El grupo decide investigar cuántos compradores potenciales hay en el instituto, produciendo una revista de prueba y realizando una encuesta entre 100 alumnos preguntándoles: «¿Hasta cuánto dinero estarías dispuesto a pagar por esta revista?». Sus datos fueron los siguientes:

Precio de venta (p ptas.)	Gratis	20	40	60	80
Gente dispuesta a pagarlo (n personas)	100	82	58	40	18

   ¿A qué precio deberían cobrar la revista para conseguir el máximo beneficio?

3. Después de unos cuantos números, el profesor decide que debe cobrar a los alumnos 20 ptas. por revista por el papel y la reproducción. ¿A cuánto deberían cobrar ahora la revista?

Presentamos así el objeto matemático de función desde una razón de ser modeladora. Como otros conceptos matemáticos, que pueden entenderse como una abstracción de conceptos de otros campos, el concepto de función es una abstracción de la idea de ley científica que sirve para el estudio de los fenómenos de cambio (Deulofeu, De la Fuente y Vilaplana, 2021).

Al tratarse de un problema de carácter abierto, se considera oportuno trabajarlo primero individualmente y después en grupos pequeños de 3-4 personas. Durante todo el proceso, el profesor estará disponible para resolver dudas y guiar a aquellos que encuentren dificultades, pudiendo parar la clase y proponer pistas en la pizarra si fuese necesario. Lo esperable es que los grupos sean capaces de plasmar sobre una ficha una solución conjunta donde las aportaciones individuales de unos y otros sean tenidas en cuenta. Finalmente, se llevará a cabo una puesta en común donde un portavoz de cada grupo expondrá sus conclusiones al resto de la clase. Con esta experiencia didáctica, mediada por el profesor, se trabajará la definición de función y se remarcarán los descriptores verbales, analíticos, tabulares y gráficos con los que este objeto matemático puede representarse.

Conclusiones

Realizar una planificación adecuada del tratamiento integral de la noción de función precisa una labor minuciosa de análisis. El presente artículo propone un acercamiento tímido a una secuencia didáctica donde las funciones son tratadas según la línea que marca la investigación educativa que sigue a la tesis de Janvier (1987). La secuencia didáctica completa puede encontrarse en Embid (2021).

Para terminar, subrayar el reto al que todos los docentes nos enfrentamos cada vez que surge la inquietud de qué forma es más apropiada para introducir y tratar un determinado objeto matemático. Citando a Ruiz (1998): «el concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza».

Referencias bibliográficas

BALL, D. L., M. H. THAME y G. PHELPS (2008), «Content knowledge for teaching: What makes it special», *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

DEULOFEU, J., A. DE LA FUENTE y L. VILAPLANA (2021), «Funciones: modelización, representaciones y autorregulación», *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (91), 32-39.

EMBID, S. (2021), *Funciones: una propuesta didáctica para Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4.º ESO*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

JANVIER, C. E. (1987), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, LEA. Publ., Londres.

MERCADO, A. I. (2007), «Matemáticas el primer día de curso, un nuevo enfoque de la evaluación inicial», *Suma*, (56), 33-38.

MIRAS, M. (1993), «Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos», en I. Solé i Gallart y otros, *El constructivismo en el aula*, 47-63.

RUIZ, H. L. (1998), *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Publicaciones de la Universidad de Jaén, España.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990), *El lenguaje de funciones y gráficas*, Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

SIERPINSKA, A. (1988), «Epistemological remarks on functions», en *Proceedings of 12 Inter. Conf. of PME*.

SIERRA, M., M. T. GONZÁLEZ y C. LÓPEZ (1998), «Funciones: traducción entre representaciones», *Aula,* 10, 89-104.

WHEATLEY, G. H. (1991), «Constructivist perspectives on science and mathematics learning», *Science education*, 75(1), 9-21.

Descubriendo las simetrías del mundo con ojos infantiles

por

Almudena Agudo Carnicer[1], José Ignacio Cogolludo Agustín[2] y Elena Gil Clemente[2]

([1]Colegio Nuestra Señora del Pilar, Salesianos. Zaragoza; [2]Universidad de Zaragoza)

El curriculum español, o al menos la práctica docente habitual, centra casi todos sus esfuerzos en iniciar el estudio de las matemáticas a través del conocimiento del número, obviando que la geometría es otra de las puertas naturales de acceso a esta disciplina. La geometría se suele posponer a etapas superiores asumiendo que la adquisición de destrezas numéricas básicas es más relevante o bien más sencilla que el aprendizaje de la geometría por el grado de abstracción que supone reducir el entorno a formas geométricas básicas. Nada más lejos de la realidad. Exploraciones realizadas con niños de Educación Infantil, incluso con discapacidad intelectual (Millán, Gil y Colella, 2017; Cogolludo y Gil, 2019) muestran que estos tienen una gran facilidad para captar ideas geométricas y que estas contribuyen a desarrollar su conciencia del mundo que les rodea.

En un trabajo reciente (Agudo, Cogolludo y Gil, 2020) se analiza cómo estos niños dan también muestras de percibir de forma natural las simetrías del mundo que nos rodea. Las respuestas que obtuvimos tras dicho análisis nos animaron a elaborar un material que facilitará a los maestros el trabajo sobre estas ideas —a las que nos referiremos como *concepciones ingenuas*— en Educación Infantil. Este trabajo es el objeto de esta comunicación.

Simetrías de un objeto en el plano. Exploración de las concepciones ingenuas de niños de Educación Infantil

El término *simetría* es muy ambiguo en la literatura de didáctica de las matemáticas. Solemos asociar la palabra simetría a una reflexión axial como, por ejemplo, la que presenta una mariposa —una simetría con eje central y dos partes reflejo una de otra—. Sin embargo, no solamente existe dicho tipo de simetría. Llamamos simetría de un objeto al conjunto de los movimientos del espacio ambiente que lo dejan invariante. Asociadas a los distintos movimientos del plano (isometrías) hay objetos que presentan otros tipos de simetría. Estudiémoslos:

— Dada una recta r, *una reflexión o simetría axial* es un movimiento que asocia a cada punto P un punto P' de la perpendicular a r que pasa por P tal que P y P' son equidistantes a r. Imaginemos una montaña al pie de un lago. Su reflejo en el agua es una reflexión con respecto a una línea imaginaria que se dibuja entre el pie de la montaña y el agua. Intuitivamente, un objeto tiene una simetría axial si lo podemos doblar por un eje de modo que las imágenes a ambos lados se superponen.

— Dado un punto P, al que denominaremos *centro de rotación*, y un ángulo orientado diremos que una *rotación o giro* es un movimiento que asocia a cada punto A un punto A' equidistante a P y el ángulo orientado $\measuredangle APA'$ es igual al ángulo dado α. Un objeto tiene una *simetría de rotación* cuando permanece invariante tras una rotación. Imaginemos una flor de cinco pétalos. Si giramos el tallo entre nuestras manos, habrá cinco momentos en los que la flor tendrá el mismo aspecto que inicialmente. Dicho de otra manera, esta flor posee una simetría de rotación de ángulo $2\pi/5$.

— Dado un vector $\vec{v}$, una traslación es un movimiento que asocia a cada punto P un punto P' tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es igual al vector $\vec{v}$. En matemáticas denominamos *friso* a una colección de objetos en $\mathbb{R}^2$ con un grupo de simetrías discreto que contiene un subgrupo de traslaciones en una única dirección. En términos didácticos podemos imaginar los frisos como una combinación de series de objetos iguales o reflejados situados en fila a la misma distancia unos de otros.

— Por último, llamamos *reflexión deslizante* al movimiento que se obtiene al componer una traslación y una reflexión axial. Hay frisos que además de tener una simetría de traslación también tienen una simetría de reflexión deslizante. Pensemos ahora en las huellas que dejan nuestros pies al pisar la arena. Al contemplarlas podemos observar cómo, entre una huella y la siguiente del mismo pie, se encuentra la huella del otro pie desplazada y reflejada con respecto a la línea de avance. Esta composición de traslación y reflexión axial se denomina reflexión deslizante.

Desde el punto de vista del descubrimiento infantil (de Castro, 2012) la simetría de los objetos es la expresión de tres características que el niño puede percibir en su entorno: estética, estabilidad y orden. Un niño es capaz de valorar que la disposición ordenada de todos los ladrillos en una construcción le proporciona belleza y estabilidad. Una pared así construida tiene, utilizando términos geométricos, varios tipos de simetrías.

Con estas ideas matemáticas y didácticas realizamos la exploración a la que hemos aludido en la introducción, con métodos cualitativos de investigación. Concluimos que la capacidad de los niños pequeños para reconocer, identificar y valorar los patrones de simetría del mundo se plasma en que sus producciones —dibujos y construcciones— tienen una cierta intencionalidad simétrica. La simetría de reflexión axial, y en el caso del espacio, la simetría de reflexión especular fueron las más recurrentes en el tipo de actividades que les planteamos (figura 1) pero, no todos los tipos de simetría aparecieron en esta exploración preliminar con el tipo de actividades propuesto a los niños.

Figura 1. Simetría axial en las construcciones infantiles

Estas conclusiones nos animaron a elaborar un material que pueda ser útil para que los maestros de Educación Infantil trabajen otro tipo de simetrías como pueden ser la de traslación o la reflexión deslizante. En esta comunicación vamos a describir este material y a presentar someramente algunas orientaciones didácticas para trabajar con él.

Material didáctico para ampliar el concepto infantil de simetría.

El material elaborado para trabajar la simetría de traslación y reflexión deslizante, está basado en la idea de friso. Consideramos que un niño realiza una simetría de traslación cuando coloca cuatro elementos o más trasladados a la misma distancia.

Aunque matemáticamente existen hasta siete tipos de frisos diferentes (figura 2), elegimos para nuestros diseños aquellos que resultan más simples para el trabajo con niños entre 3 y 6 años. Hemos diseñado varios frisos con diversos elementos a trasladar, que sean imágenes familiares para el niño, por ser objetos de su vida cotidiana —casas, mariposas, flores, peces, pies— o frecuentes en sus relatos de fantasía —castillos—. El niño tiene a su

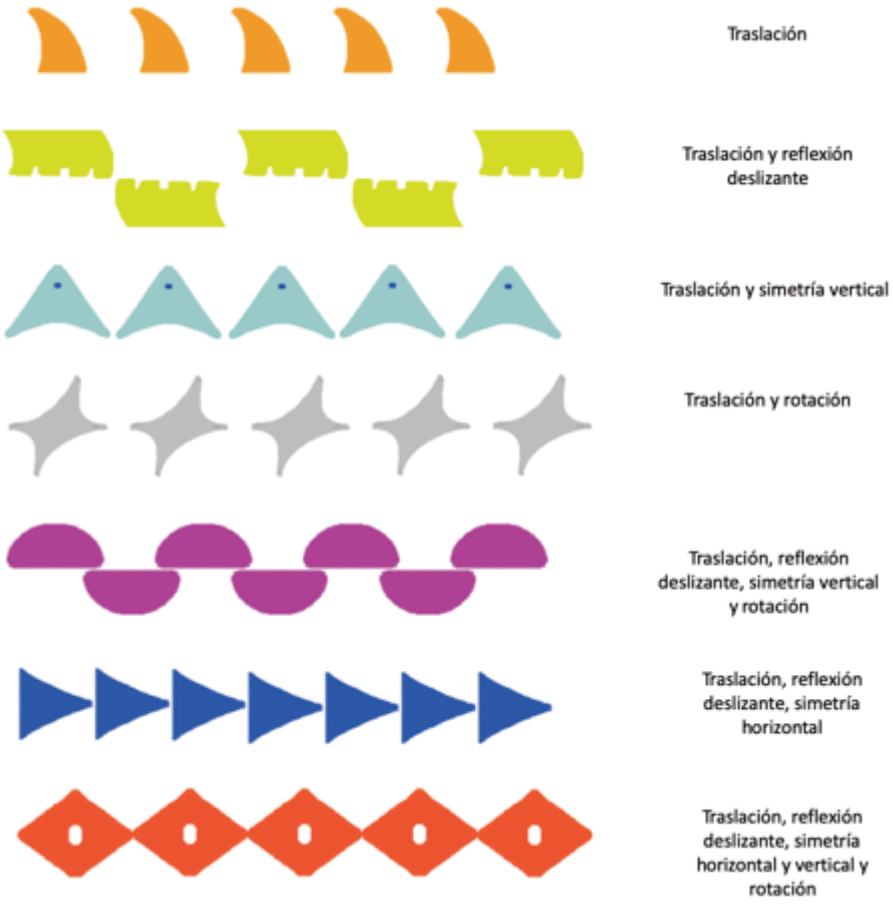
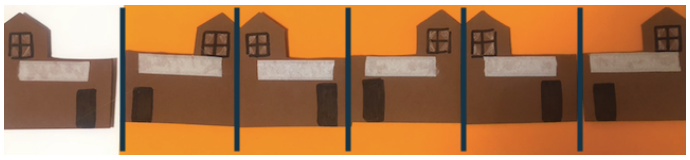


Figura 2. Los siete frisos (Elaboración propia)

disposición cinco imágenes a doble cara que puede colocar libremente en unos soportes. Si coloca las imágenes a la misma distancia, conseguirá una simetría de traslación. Como además algunas imágenes presentan también otras simetrías, el niño puede obtener esta simetría de traslación de distintas formas, además de otras simetrías.

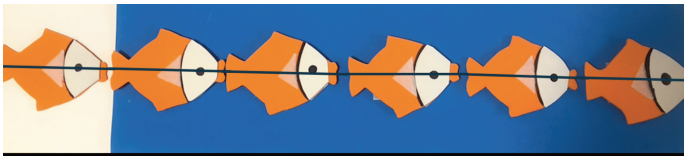
— *Friso del castillo.* El castillo trasladado presenta una reflexión axial de eje vertical. El niño puede conseguir fácilmente que su friso tenga una simetría de la traslación y varias simetrías axiales de eje vertical.

— *Friso de la casa*. Este elemento de traslación no presenta simetrías. Aún así según el niño coloque la figura su friso puede tener una simetría de traslación, pero también varias simetrías axiales de eje vertical.

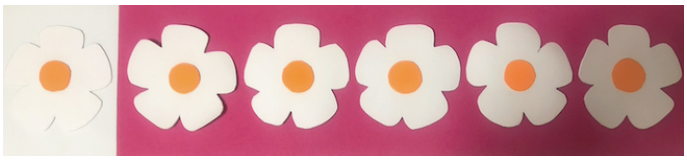


— *Friso de la mariposa*. La mariposa no tiene simetrías porque tiene un ala de cada color. Por ello trabajamos de forma semejante al friso anterior.

— *Friso del pez*. El pez trasladado posee una reflexión axial de eje horizontal. El niño puede conseguir además de la traslación, varias simetrías de reflexión axial vertical y horizontal e incluso una simetría de reflexión central, al ser los dos ejes anteriores ortogonales.

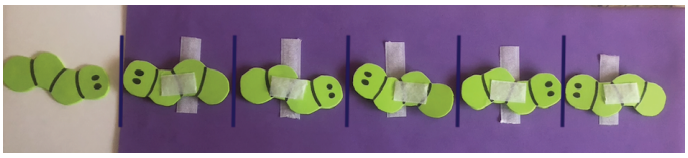


— *Friso de las flores*. La flor trasladada tiene una simetría de reflexión axial y una simetría de rotación de ángulo $2\pi/5$. El niño puede conseguir fácilmente en el friso varias simetrías de reflexión axial, además de la de traslación.



— *Friso de los pies*. Aquí el pie trasladado no tiene simetrías. Sin embargo, si el niño coloca las huellas tal y como las veríamos en la arena de la playa tras pisarla podrá obtener una reflexión deslizante.

— *Friso del gusano*. Este es el más difícil por la silueta del elemento de traslación. Colocándolo en ciertas posiciones, el niño puede conseguir una simetría de traslación o varias reflexiones axiales verticales.



Orientaciones didácticas

El propósito del material es que los niños jueguen y exploren las diferentes simetrías que se pueden conseguir con cada uno de ellos. Queremos proporcionar experiencias que potencien su intuición geométrica, de forma que los niños vayan generando nuevas ideas cada vez más complejas. Ideas que posteriormente en etapas superiores se consolidarán como un conocimiento matemático más formal. Se pueden diseñar diversas actividades para hacer uso del material. Es aconsejable que las actividades que propongamos estén provistas de un sentido humano (Donaldson, 1979) para los niños. Ambientarlas en una historia que dote de significado lo que hacemos es siempre un recurso fructífero.

Aconsejamos utilizar una secuencia didáctica que incluya:

— Exploración libre del elemento de traslación de cada friso para que el niño descubra si presenta simetrías. Podemos proporcionarles los elementos de traslación impresos en papel a doble cara de manera que puedan doblarse o pintarse para visualizar los ejes de simetría.
— Colocación, no dirigida, de los elementos de traslación en el friso. Observamos si el niño explora todas las posibles simetrías que se pueden dar en cada friso.
— Exploración dirigida de las simetrías que el niño no haya descubierto. Por ejemplo, introducir pequeñas modificaciones en la serie que el niño ha creado y observar sus reacciones.

En el momento de presentar esta comunicación se está probando el material con un grupo de niños de 3 a 6 años con Trisomía 21. Los resultados iniciales parecen confirmar su potencia para desencadenar en ellos procesos de descubrimiento y creación de ideas. Los niños son capaces de descubrir las simetrías de los objetos trasladados doblando por los ejes adecuados o girando las figuras y muestran entusiasmo y alegría al descubrirlas. En ausencia de soporte, los niños tienden además a colocar las figuras a la misma distancia, tratando de realizar una simetría de traslación.

Conclusiones

El material aquí presentado forma parte de una investigación más amplia que explora la potencia de la geometría para hacer emerger el pensamiento infantil (Millán, 2016; Gil,2020) combinando el trabajo de campo con la reflexión histórico-epistemológica. Un buen conocimiento de los conceptos matemáticos con los que queremos que los niños trabajen —en este caso las simetrías de los objetos—, un diseño de actividades que tengan un sentido para los niños —un relato o un reto estimulante— y un trabajo del maestro que respete el ritmo de descubrimiento infantil —dando tiempo a la exploración y ayudando si es necesario—, son elementos clave que sustentan un buen diseño de actividades.

Referencias bibliográficas

Agudo, A., J. I. Cogolludo y E. Gil (2020), *Conocimiento informal de simetrías en niños de 3 a 5 años*, Trabajo Fin de Máster no publicado, Universidad de Zaragoza.

Castro, C. (2012), «Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en educación infantil», *Revista de Educación Matemática*, 29(3), 23–40.

Donaldson, M. (1979), *Children's Mind*, W.W. Norton & Company, New York.

Gil, E. (2020), *Matemáticas que suman*, Horsori, Barcelona.

Gil, E., y J. Cogolludo (2019), «The effectiveness of teaching geometry to enhance mathematical understanding in children with Down Syndrome», *International Journal of Disability, Development and Education*, 66(2),186-205.

Millán, A. (2016), *Numeri e forme*, Zanichelli, Bolonia.

Millán A., E. Gil e I. Colella (2017), «Combining historical, foundational and developmental insights to build children's first steps in mathematics», *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Dublin.

Juegos de mesa como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas

por
José Miguel Maimó Oliver, Mónica Rosado Fontanet y Luis Cros Lombarte
(CEIP Sant Antoni de Portmany, Ibiza; Escola Marinada, Montornès del Vallès, Barcelona; Escola Pia de Sarrià, Barcelona)

En la era de la tecnología parecía que los juegos de mesa quedarían obsoletos, para nostálgicos o como pieza de coleccionista o de museo pero la situación de confinamiento y de restricciones de movilidad ha hecho que se hayan puesto de moda. Esto es una noticia genial ya que el juego de mesa tiene una gran cantidad de beneficios: ayuda a resolver problemas, generar estrategias y adecuarlas en función de las necesidades del momento, ayudan a aprender a gestionar la frustración de la derrota y la victoria, ayuda a tomar decisiones sobre la vida real sin las consecuencias de tomarlas en la realidad, ayuda a entender instrucciones y seguirlas y ayudan al desarrollo de la concentración, la memoria, la observación y la imaginación. Todo esto nos gustaría trasladarlo al aula y por esto, un grupo de personas relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, formamos el grupo SET cuyo objetivo principal es analizar juegos de mesa para ver su utilidad como herramienta para aprender matemáticas.

Después de cinco años desde la creación del grupo, hemos analizado más de un centenar de juegos, clasificándolos según el contenido que se puede trabajar en el aula, concretando a la edad que sería adecuado llevarlo a cabo y, si es necesario, adaptarlo para otros niveles o contenidos. En estos cinco años, hemos divulgado el uso del juego de mesa como herramienta pedagógica publicando recomendaciones de juegos, realizando talleres en escuelas y AFAs, participando en ferias de juegos de mesa, realizando actividades para el alumnado de diferentes etapas educativas y participando en congresos y jornadas de divulgación matemática.

En esta jornada pretendemos compartir con vosotros nuestra experiencia, primero en la selección de un buen juego para trabajar en el aula y segundo en cómo se ha de llevar al aula y finalmente compartiendo la experiencia llevada a cabo en un aula de sexto de primaria con el juego *El rey de los dados* y otra llevada a cabo en primero de ESO con el juego *Rondo*.

¿Qué puede aportar el juego de mesa al aprendizaje de las matemáticas?

Como ya hemos dicho, el juego es básico en el aprendizaje y, en particular, los juegos de mesa tienen multitud de beneficios que se pueden aprovechar en el aula. Los más evidentes son la resolución de problemas y la lógica. Por esto, cualquier juego de mesa podemos considerarlo adecuado para el aprendizaje de las matemáticas, como referencia el artículo de Navarro y Deulofeu (2016). En el tema de lógica, es cierto que en ningún currículum aparece como contenido que se deba trabajar, pero en todas las clases establecemos situaciones que una vez resueltas reconvertimos en otras similares empezando nuestra nueva propuesta como «y si…». Esto es lo que nos preguntamos cada vez que queremos hacer una acción en un juego o cuando analizamos la estrategia utilizada y volvemos a jugar, es lo que denominamos metajuego. En ocasiones lo hacemos sin ser conscientes que es lo que desearíamos que pasase en nuestras clases de mates.

Si hablamos de contenido, en muchos juegos es necesario el contaje, el azar o la geometría para establecer una estrategia ganadora, sin ser conscientes estamos trabajando contenido matemático.

Además del contenido, el principal aspecto que aporta el juego de mesa al aprendizaje de las matemáticas es su visión lúdica. Existe un estigma impregnado en la sociedad de que las matemáticas son aburridas, difíciles, formales y una largo etcétera de calificativos negativos que vienen de su aprendizaje en las escuelas. Acercar las matemáticas a la realidad, a situaciones palpables, hacer las matemáticas reales o vivenciarlas o introducir conceptos abstractos de manera manipulativa y lúdica ayuda a cambiar esa visión negativa. Entre todo el material que se ha ido introduciendo en las aulas para permitir el cambio de paradigma, se debería contar con el juego de mesa como una herramienta pedagógica más. El ejemplo más palpable de ese cambio de paradigma es cómo cambian su prejuicio adultos que han tenido una mala experiencia en las aulas con las matemáticas cuando, después de jugar a un juego, les explicas que están haciendo matemáticas y se las muestras, el efecto es increíble. Por lo tanto, ¿qué mejor que, a los adultos del futuro, evitarles el mal trago de sufrir siempre con las matemáticas y mostrarles su lado más amable y lúdico?, ¿qué mejor que enseñar matemáticas desde una emoción positiva que desde una emoción negativa? Seguro que esto nos ayudará a mejorar la estima por las matemáticas y ayudará a aprenderlas mejor.

Para llevar a cabo una acción pedagógica con el uso de juegos de mesa habrá que tener en cuenta ciertas cuestiones para que sea un éxito y no quede como algo anecdótico, «un rato de jugar».

El docente que lleva juegos de mesa al aula:

— Tiene que tener claro que el juego se lleva al aula con un objetivo pedagógico.
— Ha de conocer los juegos que se lleva para poder resolver las dudas que surgen y aceptar o denegar las posibles adaptaciones del juego que hagan los jugadores.
— Ha de tener claro el objetivo pedagógico que se quiere conseguir con el uso del juego que lleva al aula.
— En la sesión de juego ha de hacer presente lo que se ha trabajado en el ámbito de las matemáticas, la metacognición que se ha realizado.

IV Jornada de Educación Matemática en Aragón - 12 de marzo de 2021

A la hora de escoger juegos para llevar al aula hay que evitar juegos que tengan unas instrucciones poco claras, que tengan muchos elementos y de pequeño tamaño y que el tiempo de juego sea tan amplio que no permita poder hacer varias partidas y reflexionar sobre la estrategia del juego y ver las matemáticas que se han trabajado. Para eso aconsejamos los juegos que denominamos 5–10–15:

— 5 minutos para comprender las instruccione. Una vez se esté jugando al juego hay que revisar que se juega de manera correcta y si se ha decidido hacer algún cambio, que este no modifique el objetivo pedagógico del juego. Una manera de dinamizar la comprensión de las instrucciones es hacerles llegar a las mismas a través de videotutoriales, de modo que en el aula simplemente haya que resolver dudas concretas y ponerse a jugar. También es una buena solución usar juegos que ya conocen los alumnos por haberlos jugado en cursos anteriores o en su casa.

— 10 minutos de juego, para poder jugar varias partidas y trabajar las matemáticas del juego.
— 15 euros de precio.

También sería adecuado un juego que costase 10 euros de precio y 15 minutos de juego.

Otra cosa que tenemos que tener en cuenta a la hora de seleccionar un juego para el aula es su «rejugabilidad»: entendemos por rejugabilidad las ganas de volver a jugar otra partida al acabarla, el «¿jugamos otra?». Si un juego al acabar no da ganas para volverlo a jugar, no cumple con la idea básica de emocionar y, por lo tanto, puede ser muy potente matemáticamente, pero no conseguirá asentar los conocimientos trabajados.

Podemos diferenciar el contenido matemático que se trabaja en los juegos de mesa según cómo se presentan:

— El contenido matemático se muestra de manera explícita, es decir, es necesario tener los conocimientos matemáticos para poder jugar al juego. Ejemplos de este tipo de juegos son *Mía*, *Código secreto 13+4*, *Alta tensión,* en el que el juego consiste en hacer operaciones o *La aventura de las tablas de multiplicar,* donde para jugar hay que conocer las tablas de multiplicar del 1 al 10.

—El contenido matemático está implícito en el juego pero, para jugar al juego, no es necesario tener conocimientos matemáticos. Para hacer presente las matemáticas realizaremos un listado de preguntas que ayuden a los alumnos a reflexionar, las matemáticas pueden estar en la estrategia o en las características del juego. Ejemplos de este tipo de juegos pueden ser el *Toma 6,* donde las cartas se agrupan según la multiplicidad del número, *El rey de los dados,* donde analizando la probabilidad de ganar unas cartas u otras se puede mejorar la estrategia ganadora o el *Ubongo,* donde se puede trabajar el cálculo de perímetros y áreas.

— Finalmente, el contenido matemático lo propone las adaptaciones que le hacemos. Hay juegos en los que la dinámica del juego es muy potente o una pequeña modificación permite trabajar conceptos abstractos desde la manipulación. Ejemplos de este tipo de juegos son el *Código Secreto 13+4,* pero incluyendo valores negativos, el *Halli Galli,* adaptado para convertir unos valores en negativos y otros en positivo y poder trabajar las operaciones con enteros.

A la hora de llevar el juego al aula también hay que diseñar la estructura que le daremos en ella:

— La temporización para la que asumiremos que la gran mayoría de las sesiones que tenemos son de 50 a 55 minutos y, en consecuencia, destinaríamos:

- Alrededor de 15 minutos a la preparación inicial: organización espacial del aula, agrupación de alumnos, reparto de juegos, preparación del juego y comprensión de las reglas del juego por todos los jugadores.
- Alrededor de 25 minutos a jugar al juego.

- Alrededor de 15 minutos para hacer presente las matemáticas que se han trabajado durante el juego y reflexionar sobre el trabajo relacionado, valoración de la sesión, metacognición...

En los juegos que tienen implícitas las matemáticas o en los juegos que se hacen adaptaciones y se trabajan acompañados por alguna ficha de reflexión, se puede alargar el periodo de juego y reducir el de hacer presente las matemáticas. En el caso de que se tenga previsto seguir con el mismo juego o hacer las preguntas de profundización en las matemáticas en sesiones posteriores, es imprescindible que se haga presente que la sesión ha sido de aprendizaje, no de juego, se pierde el sentido pedagógico de la sesión cuando el alumnado sale de la misma con la sensación de «hoy en clase hemos jugado».

— Agrupamiento, que dependerá del número de alumnos en el aula y del número de ejemplares del juego que se dispongan. Para decidir el número de jugadores por juego nos podemos orientar por la recomendación del juego pero debemos analizar lo que hace cada jugador desde que acaba su turno hasta que le vuelve a tocar jugar. Algunos juegos fomentan la concentración y los jugadores han de estar atentos a lo que juega cada uno ya que influye en su propio turno, o existen juegos en que el turno no es ordenado y se puede participar en cualquier momento. Estos juegos son los ideales para el aula, por contra los juegos en los que los jugadores desde que acaban su turno hasta que los vuelve a tocar no han de estar atentos o pasa mucho tiempo porque así lo requiere la dinámica del juego, no son buenos juegos para el aula ya que a veces, cuando un alumno no tiene nada que hacer, hace lo que no debe. Algunos juegos pueden estar diseñados para un número grande de jugadores pero nosotros lo podemos limitar en función de nuestra necesidad. Como soluciones para situaciones en las que disponemos de pocos ejemplares del mismo juego os damos las siguientes:

- Crear dinámicas de juegos con varios juegos que trabajen el mismo concepto e ir rotándolos entre los grupos de juego. Para hacer esto hay que tener presente que el tiempo de juego ha de ser similar para que se acabe la partida y la reflexión sobre el juego al mismo tiempo y hacer la rotación. Nunca es una buena opción acabar el juego sin llegar al objetivo del mismo que es establecer un ganador. Es muy frustrante para los jugadores haber creado una estrategia ganadora y no poder comprobar si es buena o no. En este caso es buena opción seleccionar juegos en los que se pueda acabar el juego tras un número determinado de rondas y que se pueda adaptar el número de rondas.
- Hacer espacios de trabajo diferenciado, donde tengamos un rincón con los alumnos trabajando con el juego, otro rincón donde otros alumnos estén trabajando con material manipulativo, otro rincón con otro grupo trabajando con el formalismo del concepto o haciendo una sesión de dudas o de explicación entre expertos… Se pueden hacer tantos espacios como sean necesarios, pero todos tienen que tener claro su trabajo en la sesión y que dure un tiempo similar. Tras diversas sesiones, todos los alumnos han de haber podido pasar por todos los espacios.

IV Jornada de Educación Matemática en Aragón - 12 de marzo de 2021

- Hacer que cada jugador sea un pequeño grupo de alumnos, 2 o 3, 4 empieza a ser complicado y más de 4 no es funcional. De este manera se puede agrupar a muchos alumnos en torno a un mismo juego, han de estar atentos para tomar decisiones y se fomenta el trabajo colaborativo, la compartición de información, el debate… Este planteamiento es ideal para los juegos solitarios, si está bien organizado es una buena propuesta para trabajar en grupos cooperativos.

Por último, está la cuestión de la evaluación y valoración del juego. Desde el punto de vista del docente lo primero que se tiene que analizar es si se ha conseguido el objetivo pedagógico que se perseguía, se puede hacer a través de algún tipo de prueba evaluativa a posteriori o a través de una rúbrica de observación. También se ha de valorar si el diseño de la sesión ha sido adecuado y listar aquellos aspectos a mejorar que se tienen que tener en cuenta para sesiones posteriores, con el mismo juego o con otros. También se puede obtener una calificación con las fichas de trabajo que se han usado durante la sesión. Desde el punto de vista del alumnado, se ha de pedir una valoración de la actividad para determinar si ha cumplido las expectativas creadas, si volverían a realizar una sesión de trabajo similar, y tienen que hacer una valoración crítica de lo que han aprendido durante la sesión. Tanto si se quiere hacer las valoraciones con fines calificativos como analíticos, recomendamos el uso de rúbricas para disponer de una valoración objetiva.

Para ilustrar cómo hacemos para aplicar en el aula el uso de juegos de mesa, compartimos dos experiencias, una realizada en 6.º de primaria con el juego *El rey de los dados,* trabajado a partir de hacer preguntas y otra de 1.º de ESO con el juego *Rondo,* usándolo con una adaptación.

Experiencia de aula con *El rey de los dados* en 6.º de primaria en el CEIP Sant Antoni de Portmany

El rey de los dados es un juego diseñado para trabajar el azar y la probabilidad en el que los jugadores son los monarcas de un reino que tienen que poblar reclutando pobladores. El rey que consiga reclutar a los convivientes más populares, con mayor puntuación, ganará la partida y será el rey de los dados. Para reclutar pobladores se colocan 6 cartas de jugadores boca arriba en la mesa, en la parte baja de las cartas aparece una combinación de colores o valores que es lo que se tiene que conseguir con 6 dados puntuados de 1 a 6 con dos caras de cada color, verde, azul o rojo. Para conseguir la combinación de la carta deseada por el jugador, se tienen tres tiradas de dados, de las que se pueden reservar dados de una a otra tirada. Cuando se consigue una combinación de alguna de las cartas boca arriba, el jugador se queda con la carta y esta se sustituye por otro personaje. Si tras las tres tiradas no se consigue ninguna combinación recibes una carta de habitante negativa. Junto a las cartas de pobladores también están las cartas de poblado. Cada poblado corresponde a una categoría de pobladores, de forma que si al ganar una carta de poblador este coincide en posición con su poblado también se conseguirá esta carta y su puntuación. El juego se acaba cuando se acaban las cartas de un poblado, las cartas de pobladores o las cartas de pobladores negativas.

Aunque en el juego es fundamental la aplicación de los conocimientos adquiridos sobre probabilidad, se puede jugar al juego sin saber nada de probabilidad. Por lo tanto, para aquellos alumnos que no ven las matemáticas en el juego, más allá del conteo final de puntos, se les tiene que hacer presente a través de una serie de preguntas que tendrán que responder en pequeño grupo al finalizar la parte de juego. Esto lo conocemos como metacognición o procesos mentales del juego: es la parte más importante del juego, ya que si no se van con la idea de solo haber jugado. Con la metacognición se pretende que cada alumno valore su forma de jugar y se enfrente a una serie de situaciones que suelen suceder en el juego para ver cómo actuaría. También es el momento en el que toman conciencia de los contenidos matemáticos que han trabajado. Para hacerlo más potente preparan un vídeo sobre el juego y los procesos mentales para las familias de clase.

El rey de los dados se lleva a clase durante un trimestre junto con otros dos juegos. Se hacen 3 sesiones por juego, es decir, un total de 9 por trimestre. La sesión tiene una duración de 75 minutos. Los juegos se han agrupado previamente en función de los contenidos que trabajan la secuencia matemática del curso. Antes de empezar con el juego han de dominar el contenido matemático y tenerlo dominado.

Para empezar con el juego se dedica una sesión a presentarlo para explicar sul funcionamiento y resolver las dudas de cómo funciona. Para que quede más claro, se hace una partida de demostración con un alumno de cada equipo de trabajo, tres en total heterogéneos.

Una vez presentado, cada equipo de trabajo juega al juego. Durante el juego, el maestro hace un seguimiento de la evolución de cada alumno. El alumno al finalizar cada sesión se autoevalúa y coevalúa.

Una vez finalizada la sesión de juego se realizan las sesiones de metacognición a partir del planteamiento de una serie de preguntas. El maestro corrige las preguntas de cada alumno y rellena una rúbrica para poder evaluar el juego. También se construye un mapa conceptual con las aportaciones de los alumnos. Finalmente, el maestro reflexiona sobre el funcionamiento del juego y valora los puntos a mejorar y los puntos fuertes de este.

Para valorar si se ha cumplido el objetivo pedagógico del juego, la consolidación del aprendizaje sobre probabilidad y azar, completamos una rúbrica para valorar los diferentes aspectos del juego, junto a los procesos mentales (metacognición). Hay una hoja de observación a lo largo de las sesiones para hacer anotaciones. Además de la valoración del objetivo también se valoran otros aspectos del juego y su uso.

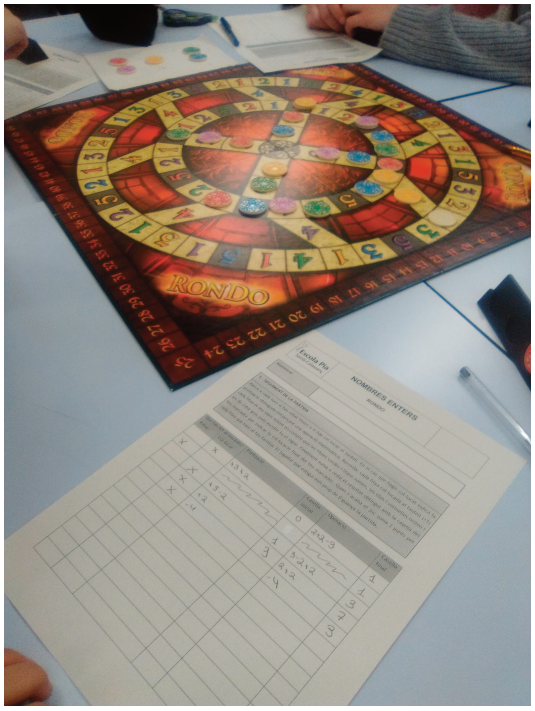
Por su parte, los alumnos hacen una autoevaluación y coevaluación al final de cada una de las sesiones, estas valoraciones se tienen en cuenta en la nota final de autoevaluación y coevaluación al finalizar la última sesión. También rellenan una rúbrica más general valorando otros aspectos al final del trimestre, una reflexión en la que valoran el juego y el maestro recoge sus aportaciones para ver si puede mejorarlo para la próxima vez que lo ponga en práctica. Durante todas las sesiones el maestro hace fotos y vídeos para tener evidencias de cómo juegan.

Experiencia de aula con *Rondo* en 1.º de ESO en la Escola Pia de Sarrià de Barcelona

Rondo es un juego creado por Reiner Knizia, doctorado en Matemáticas por la Universidad de Ulm (Alemania). El objetivo del juego es tan sencillo como ser el jugador con más puntos acumulados cuando se acabe el juego.

Para conseguir este objetivo se han de ir acumulando puntos colocando las fichas circulares, de cinco colores diferentes, azul, verde, amarillo, rojo y lila, sobre las casillas del tablero. Si el color del número de la casilla coincide con el color de la ficha, se acumulan tantos puntos como indica la casilla, si en un turno sobre una misma casilla se colocar más de una ficha, el valor de la casilla se multiplica por el número de fichas colocadas en ella.

Para empezar a colocar las fichas en el tablero se empieza en las casillas adyacentes al centro. El resto de jugadores, por turnos en dirección de las agujas del reloj, han de colocar sus fichas adyacentes a alguna casilla con ficha o desde el centro.



En cada turno, todas las fichas en las que coincida color de la ficha y color del número de la casilla sirven para acumular puntos, si una ficha no coincide, se coloca boca abajo y no puntúa.

Al principio del juego cada jugador comienza con dos fichas que cogerá al azar de una bolsa donde se encuentran todas las fichas, cada jugador las colocará en un atril que le permitirá ver todas sus fichas sin que las vean sus rivales. En su turno, puede elegir colocar fichas en el tablero, puntuar y robar una ficha de la bolsa o no colocar fichas en el tablero y robar dos fichas de la bolsa. Ningún jugador puede acumular más de cinco fichas en su atril.

El juego acaba cuando se acaban las fichas de la bolsa o todas las casillas de fondo sombreado del tablero son ocupadas.

El tablero está formado por dos círculos concéntricos divididos en casillas con los números de colores, los dos círculos se unen por unas casillas denominadas puentes.

Este juego tal como lo hemos contado simplemente trabajaría operatividad con números naturales y con valores pequeños, quizás no merezca la pena tratar de explicar toda la dinámica del juego para un

fin tan pequeño y del que disponemos otros recursos y juegos más potentes que consiguen el mismo objetivo. Pero con una pequeña adaptación, sin cambiar la dinámica del juego, lo convertimos en un juego para practicar el cálculo con enteros. La modificación será que el objetivo final del juego es que al acabar la partida gana quien consiga una puntuación acumulada más próxima a 0. Para esto las fichas de color rojo y lila puntúan en negativo, las de color verde y azul puntúan en positivo y las de color amarillo puntúan en positivo o negativo según el interés del jugador en el turno de juego. También se contabiliza un punto por cada ficha que se coloque en el tablero y un punto por cada ficha que esté en el atril del jugador al acabar la partida.

El tablero, en su parte exterior, dispone de una tabla de contaje de puntos que rodea todo el tablero del 0 al 99, como la puntuación en el juego con su adaptación para números enteros estará alrededor del 0 se puede sustituir la parte de la puntuación del 75 al 99 por números del −25 al −1 de modo que dispondremos de una línea numérica de enteros del −25 al 74.

¿Por qué es necesario el uso del juego para trabajar las operaciones con enteros?

En sí mismo la operación de agrupar un número positivo y uno negativo no representa gran dificultad. Seguramente todo el mundo tiene claro que si está en la planta 2 de un edificio y baja cinco plantas, llegará hasta el tercer subterráneo. También se tiene claro que si estamos a 2 grados bajo cero y la temperatura sube 5 grados llegaremos a estar a 3º C sobre cero. Pero cuando esto lo trasladamos a una operación escrita, al concepto abstracto de desplazarnos en la recta de enteros o al concepto de agrupar un número positivo con uno negativo, el resultado final no siempre resulta tan evidente. Nos hemos encontrado que ante la operación 2−5, en una misma clase, se han obtenido como posibles respuestas 7, −7, 3 o −3, o directamente «Ay, no sé, es que a mi se me dan mal las matemáticas».

El objetivo que se persigue con el uso del juego de mesa como material manipulativo y lúdico para trabajar las operaciones con enteros es dotar de seguridad al alumnado que se cree incapaz de realizar las operaciones de manera correcta y darle herramientas manipulativas o vivenciales para llevar a cabo el cálculo de manera correcta.

¿Cómo llevar el juego al aula?

Para que el objetivo pedagógico del juego se pueda cumplir, este se ha de jugar siguiendo las reglas de manera correcta, para eso los alumnos han de saber jugar al juego. Si en la sesión de aula se va a usar más de un juego diferente es conveniente que los alumnos hayan visto algún tutorial de cómo se juega, si se trabaja con grupos cooperativos se puede asignar un miembro del grupo que tenga la función de mirar las instrucciones del juego y explicárselas a sus compañeros antes de empezar. En el caso que toda clase trabaje con un juego se puede hacer una explicación en el aula de manera general y resolver las dudas que surjan *in situ*. Es importante que durante las primeras rondas de juego el docente observe si se juega correctamente o que si se ha hecho alguna variación de la normas esta no influya en los objetivos pedagógicos que queremos conseguir con el uso del juego. Si se dispone de tiempo, lo ideal es jugar alguna partida al juego como juego, sin fichas de trabajo ni con las adaptaciones explicadas.

Para organizar al grupo clase, hacemos grupos de 4 ya que el juego es para cuatro jugadores, aunque el juego es jugable con la misma rejugabilidad para dos o tres jugadores, lo que permite hacer otro tipo de agrupaciones si se dispone del número necesario de juegos y el número de alumnos del grupo clase así lo requiere.

Aunque el juego del *Rondo* lo hemos usado en experiencias de aula, junto con otros juegos, como práctica y refuerzo del cálculo con enteros, también es adecuado para ser utilizado para introducir a los alumnos en el cálculo con enteros.

Para que el juego consiga los objetivos pedagógicos marcados se ha de jugar a la adaptación indicada con una hoja/ficha en la que cada jugador indica la operación de los puntos que acumula en su turno con su resultado, la casilla de puntuación en el que está situado su marcador de puntos antes de su turno y la casilla a la que ha de acabar su marcador al terminar su turno. Una vez completada la fila de su turno ha de reproducir su puntuación en la línea de contaje y comprobar que el resultado obtenido en la ficha y el obtenido en el tablero es el mismo. En el caso de que no sea así, tendrá que revisar el procedimiento realizado, tarea en la que los compañeros de juego le pueden ayudar.

Referencias bibliográficas

Navarro, A., y J. Deulofeu (2016), «Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia», *Suma*, 82, 9-17.

Ecuaciones en 2.º ESO desde la Historia de las Matemáticas

por
Mari Carmen Morales Barnés y Christian H. Martín Rubio
(IES San Juan Bosco, Lorca, Murcia; IES Clara Campoamor Rodríguez, Zaragoza)

> Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.
>
> Bell, E. T. (1985) *Historia de las Matemáticas*

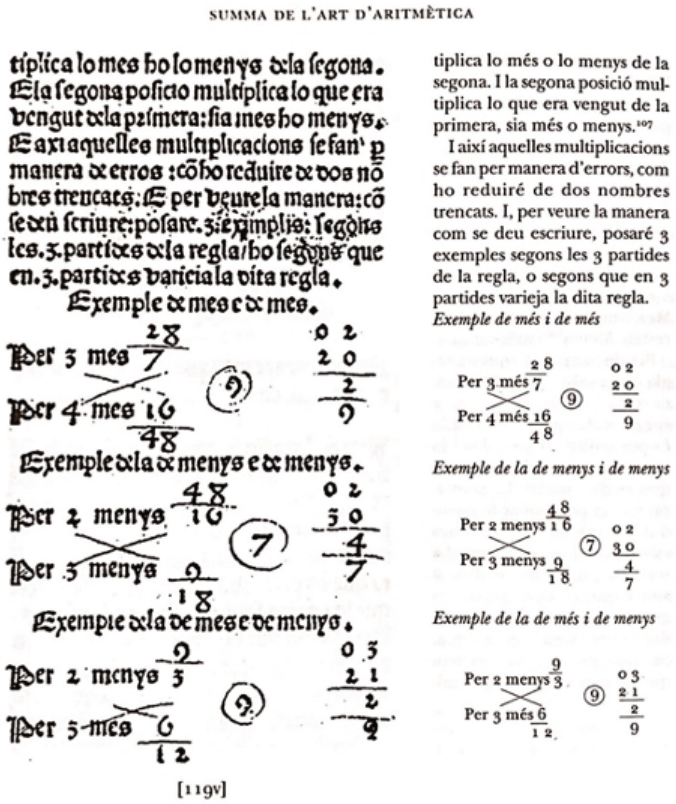
> Hasta el niño más inteligente se encuentra con dificultades muy grandes, por regla general, al iniciarse en álgebra. La utilización de las letras es un misterio cuyo único propósito parece la mistificación. (…) El hecho es que en álgebra se enseña primero al espíritu a considerar verdades generales, verdades de las que no se afirma que lo sean para esta o aquella cosa en particular, sino para cualquiera de las de todo un conjunto de cosas… Normalmente se continúa con el método adoptado en aritmética: se enuncian las reglas sin una explicación adecuada de sus bases; el alumno aprende a usarlas ciegamente, y al poco tiempo, cuando es capaz de obtener la respuesta que espera el profesor, cree que ha dominado las dificultades de la materia. Pero probablemente no ha comprendido profundamente casi nada de los procedimientos utilizados.
>
> Russell, B. «El estudio de las matemáticas», en *Mística y Lógica* [1]

La función didáctica de la Historia de las Matemáticas, como instrumento de comprensión de sus fundamentos, de la evolución y dificultades de sus conceptos, de sus métodos vivos y como fuente de respuesta a los retos de su aprendizaje, parece asentada en la comunidad educativa, aunque su uso en el aula sigue siendo más bien esporádico. En general, nuestros libros de texto presentan los conceptos y las ideas matemáticas de una forma cerrada y acabada, bajo la premisa, además, del actual paradigma matemático, caracterizado por que «las verdades matemáticas no necesitan verse ni imaginarse. Simplemente se exige la consistencia lógica interna del encadenamiento proposicional» (Hormigón, 1995:116). No es de extrañar que, como nos señala Russell, hasta la niña más inteligente, hasta el niño más curioso, tenga dificultades con nuestra materia. Y en álgebra, necesitada de una mayor capacidad de abstracción, muchas más.

Partiendo de estos análisis previos, se planteó el trabajo de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en varios cursos de 2.º ESO. Estos cursos venían de una práctica casi nula en las ecuaciones. Las especiales circunstancias en que se desarrolló el final del curso pasado —y se está desarrollando el presente [2]—, hizo que apenas vieran álgebra en 1.º ESO y mucho menos, ecuaciones. Esto, por un lado, permitía poder iniciar este estudio casi desde cero, a la vez que, por otro lado, obligaba a tratar este año lo correspondiente a dos cursos. A partir de esta situación se pretendió diseñar una manera de poder trabajar la resolución de problemas desde el comienzo del tema, sin tener que esperar a tratar con la trasposición de términos en las expresiones algebraicas y postergar, al final del tema, los «problemas». Podemos sintetizar los objetivos buscados en: la asociación, desde el inicio, del álgebra con la búsqueda de soluciones de problemas; mostrar diferentes formas de encontrar la solución correcta en un problema concreto; alejarnos de la formalización abstracta del algoritmo estanco que presenta el producto final; usar la resolución de problemas como elemento director del álgebra e intentar una transición más continua y cómoda entre el trabajo en aritmética y en álgebra.

Tras una breve investigación en las formas históricas de resolución de problemas asociados a ecuaciones de primer y de segundo grado, observamos cómo los métodos algebraicos fueron relegando a los métodos aritméticos.

Estos, utilizados durante siglos, son mucho más intuitivos pero su objetivo era resolver tipos concretos de problemas, creando distintas colecciones de ellos, con un propósito claramente práctico y sin justificar la regla utilizada. Los métodos algebraicos, por el contrario, son métodos canónicos de resolución, concentrando todos los problemas en torno a un solo tipo, más eficaces y coherentes con el actual paradigma matemático, al que hacíamos antes referencia. Y ahí es donde se sitúa el coste a pagar, son mucho más abstractos. ¿Podríamos comenzar resolviendo problemas por medio de métodos aritméticos y pasar más tarde a la formalización algebraica y sus métodos? ¿Podríamos emular mínimamente la historia de las matemáticas en una pequeña aula?


SUMMA DE L'ART D'ARITMÈTICA

tiplica lo mes ho lo menys de la segona. E la segona posicio multiplica lo que era vengut de la primera: sia mes ho menys. E axi aquelles multiplicacions se fan' p manera de erros: cõ ho reduire de dos nõ bres trencats. E per veure la manera: cõ se deu scriure: posare. 3. exemples: segons les. 3. partides de la regla: ho segons que en. 3. partides varieja la dita regla.

Exemple de mes e de mes.

Per 3 mes 28 7 — Per 4 mes 16 — 48 — 9 — 02 20 2 9

Exemple de la de menys e de menys.

Per 2 menys 48 16 — Per 3 menys 9 — 18 — 7 — 02 30 4 7

Exemple de la de mes e de menys.

Per 2 menys 9 3 — Per 3 mes 6 — 12 — 9 — 03 21 2 9

[119v]

tiplica lo més o lo menys de la segona. I la segona posició multiplica lo que era vengut de la primera, sia més o menys.[107]

I així aquelles multiplicacions se fan per manera d'errors, com ho reduiré de dos nombres trencats. I, per veure la manera com se deu escriure, posaré 3 exemples segons les 3 partides de la regla, o segons que en 3 partides varieja la dita regla.

Exemple de més i de més

Per 3 més 28 7 — Per 4 més 16 — 48 — 9 — 02 20 2 9

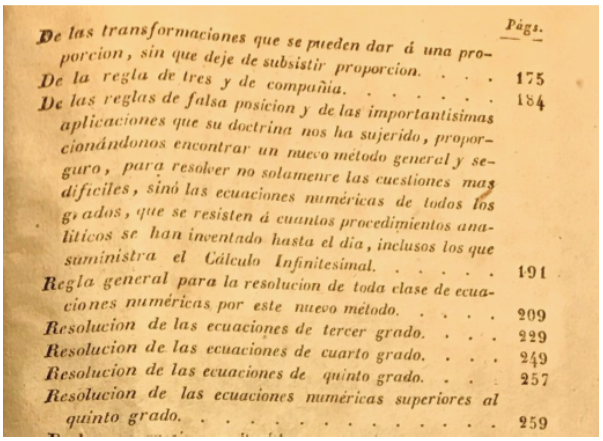
Exemple de la de menys i de menys

Per 2 menys 48 16 — Per 3 menys 9 — 18 — 7 — 02 30 4 7

Exemple de la de més i de menys

Per 2 menys 9 3 — Per 3 més 6 — 12 — 9 — 03 21 2 9

Figura 1. *Summa de l'art d'Aritmètica* (Santcliment, 1482)


Págs.

De las transformaciones que se pueden dar á una proporcion, sin que deje de subsistir proporcion. . . . 175

De la regla de tres y de compañia. 184

De las reglas de falsa posicion y de las importantísimas aplicaciones que su doctrina nos ha sujerido, proporcionándonos encontrar un nuevo método general y seguro, para resolver no solamente las cuestiones mas difíciles, sinó las ecuaciones numéricas de todos los grados, que se resisten á cuantos procedimientos analíticos se han inventado hasta el dia, inclusos los que suministra el Cálculo Infinitesimal. 191

Regla general para la resolucion de toda clase de ecuaciones numéricas por este nuevo método. 209

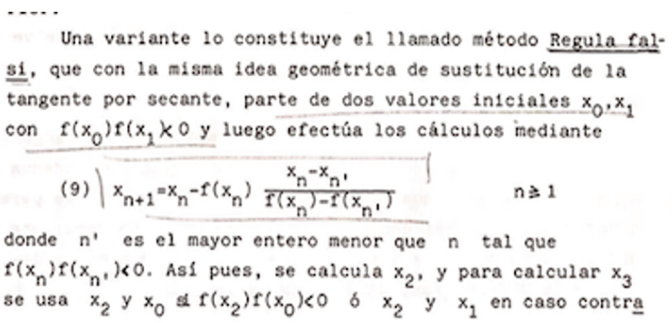
Resolucion de las ecuaciones de tercer grado. . . . 229

Resolucion de las ecuaciones de cuarto grado. . . . 249

Resolucion de las ecuaciones de quinto grado. . . . 257

Resolucion de las ecuaciones numéricas superiores al quinto grado. 259

Figura 2. *Compendio de matemáticas puras y mistas, Tomo I* (*Vallejo, J. M.*, 1840)


Una variante lo constituye el llamado método Regula falsi, que con la misma idea geométrica de sustitución de la tangente por secante, parte de dos valores iniciales x_0, x_1 con $f(x_0)f(x_1)<0$ y luego efectúa los cálculos mediante

$$(9)\quad x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n'}}{f(x_n)-f(x_{n'})} \qquad n\geq 1$$

donde n' es el mayor entero menor que n tal que $f(x_n)f(x_{n'})<0$. Así pues, se calcula x_2, y para calcular x_3 se usa x_2 y x_0 si $f(x_2)f(x_0)<0$ ó x_2 y x_1 en caso contra

Figura 3. *Cálculo Numérico. Resolución de ecuaciones y sistemas* (Gasca, 1987)

El *método de la falsa posición* es un método aritmético ya presente en las civilizaciones de la Edad Antigua y utilizado comúnmente hasta el siglo XVIII. Por poner dos ejemplos significativos, podemos encontrarlo en la resolución del problema 24, del *Papiro de Ahmes* o *Papiro Rhind* (1650 a. C.) o en el capítulo 12 y 13 del *Liber Abaci* (1202), de Leonardo de Pisa —Fibonacci—. También nos lo encontraremos en el primer libro de matemáticas publicado en España, precisamente en Zaragoza, en castellano: *Summa de l'art d'Aritmètica* (1482) de Francesc Santcliment[3] y una muestra de la posible importancia que pudo llegar a tener nos la proporciona el *Compendio de matemáticas puras y mistas, Tomo I* (1840) de José Mariano Vallejo, que en esta 4.ª edición le dedica varias páginas a explicar este método que resolverá «(…) ecuaciones numéricas de todos los grados, que se resisten á cuantos procedimientos analíticos se han inventado hasta el día, inclusos [sic] los que suministra el Cálculo Infinitesimal». No nos sorprendamos e intenten recordar si este método es uno de los que el lector o lectora estudió en la Facultad de Matemáticas. Los autores de este artículo sí, concretamente en la asignatura Cálculo Numérico de 3.º curso explicada mediante el libro de Mariano Gasca, del mismo título que la asignatura, concretamente en el tema X, «Métodos de resolución de ecuaciones no lineales: generalidades», y en el tema XI, «Métodos de resolución aproximada más usados».

La regla de la falsa posición que vamos a utilizar para resolver ecuaciones lineales, parte de un valor cualquiera (método simple) o de dos valores (método doble) y a partir de los errores cometidos al tomar esos valores, se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad. Veamos el método simple para resolución de ecuaciones del tipo $ax=b$ y para ello supongamos el siguiente enunciado, uno de los primeros que utilizamos en el aula:

En un pueblo había cinco hornos en los que se coció el mismo número de panes. Al mediodía, dos de los hornos habían vendido todos los panes, el tercer horno tenía vendida la mitad, el cuarto horno, la tercera parte y el quinto horno, la cuarta parte. Si se habían vendido en total 296 panes. ¿Cuántos panes coció cada horno?

Utilizando el método algebraico, la forma de resolverlo sería por medio de la ecuación:

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=296.$$

Cuya resolución es:

$$\frac{12x+12x+6x+4x+3x}{12}=296 \quad\Rightarrow\quad \frac{37x}{12}=296 \quad\Rightarrow\quad 37x=12\cdot 296 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{12\cdot 296}{37}=96 \text{ panes.}$$

Algo no muy asequible para alguien que una hora antes no había tenido el placer de conocer una ecuación.

Por la regla simple de la falsa posición, suponemos que cada horno ha cocido un número determinado de panes, por ejemplo, 12. Si fuera ese número, el número de panes vendidos hubiera sido $12+12+6+4+3=37$ panes, es decir, la proporción entre los panes cocidos por cada pan vendido es $12/37$, luego para los 296 panes vendidos, será:

$$x=\frac{12}{37}\cdot 296=\frac{12\cdot 296}{37}=96 \text{ panes.}$$

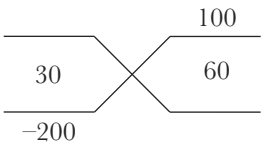
Lo que resulta mucho más comprensible para una persona que acaba de dar fracciones y proporcionalidad.

Estudiemos ahora la regla compuesta de la falsa posición, para ecuaciones de la forma $ax+b=K$. Para ello utilizaremos otro ejemplo, resuelto el segundo día de clase, y una versión propia de la regla, pensada para facilitar su explicación en el aula. Supongamos el enunciado:

Ana y su madre cruzan una calle por el paso de cebra. Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana, ¿cuánto mide el paso de cada una?

Esta vez dejaremos la resolución por el método algebraico para alguna persona que aún pueda sentir cierta desconfiada por los métodos históricos y veamos cómo lo solucionamos de esta otra forma. A diferencia de la anterior, esta vez tomaremos dos posibles valores para la longitud del paso de, por ejemplo, Ana. Supongamos que mide 30 cm[4]. Por tanto, el de la madre medirá: $30+20=50$ cm. Si Ana ha dado 35 pasos, ha recorrido $30\cdot 35=1\,050$ cm al cruzar la calle y la madre habrá recorrido: $500\cdot 25=1\,250$ cm. Como han recorrido el mismo espacio, el error cometido al considerar el paso de Ana de 30 cm en lugar de su medida exacta, x cm (error de $(30-x$ cm), es de $1\,050-1\,250=-200$ cm. Supongamos ahora otra medida del paso de Ana, por ejemplo, 60 cm. Volviendo a realizar los cálculos anteriores, obtenemos que esta vez el error cometido en la medida del paso: $60-x$ cm, nos da un error en el recorrido de $2\,100-2\,000=100$ cm.

La regla compuesta de la falsa posición nos dice que la respuesta correcta se obtiene haciendo los productos cruzados y dividiendo por la diferencia de los errores, es decir:



$$x=\frac{30\cdot 100-60\cdot(-200)}{100-(-200)}=\frac{15000}{300}=50 \text{ cm.}$$

Pero es cierto que estamos dando otra regla «mágica», que necesita justificación. De las diferentes que podemos dar, y algunas de ellas se pueden encontrar en el material compartido de la presentación en la IV JEMA, nos parece interesante mostrar, en 1.º o 2.º ESO, la que sigue, ya que nos va a permitir introducir, de una manera más natural, cómoda y menos rupturista, la notación algebraica y la transposición de términos.

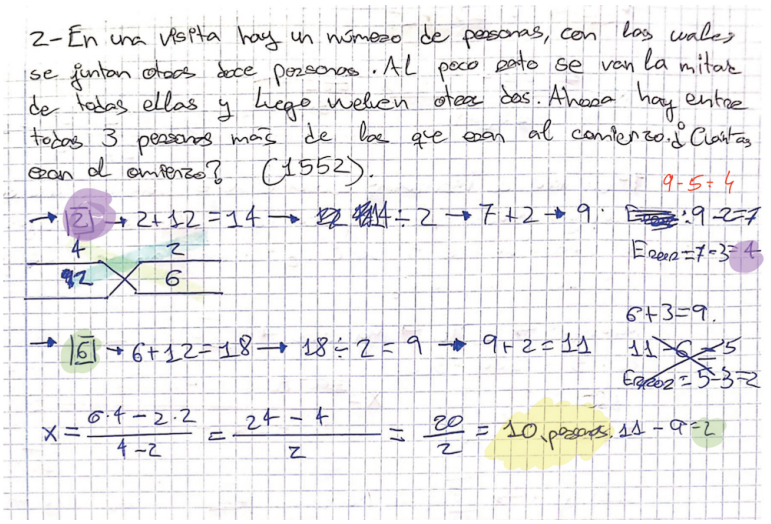


Figura 4. Solución de una alumna a un problema del Libro primero, de *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel (Meavilla, 2013)

Volvamos al final del razonamiento anterior, justo antes de aplicar la regla. Lo interesante es que la proporción del error cometido es una constante en este problema, es decir que:

$$\frac{30-x}{-200}=\frac{60-x}{100}.$$

Y como el alumnado ha trabajado el significado de fracciones equivalentes, sabe que eso significa que:

$$100\cdot(30-x)=-200\cdot(60-x)\Rightarrow 3\,000-100\cdot x=-12\,000+200\cdot x.$$

Como $3\,000=-12\,000+15\,000$ y como $200=-100+300$, la expresión anterior queda en:

$$-12\,000+15\,000-100\cdot x=-12\,000-100\cdot x+300\cdot x.$$

Lo que nos permite olvidarnos de los sumandos iguales y buscar la x que haga realidad esa igualdad, es decir, buscar la x que cumpla que $15\,000=300\cdot x$, o lo que es lo mismo, el número x que multiplicado por 300, nos dé 15 000… el paso de Ana medirá 50 cm y el de su madre 70 cm.

En ir combinando estas dos formas y saber en qué momento podemos pasar a la formulación exclusivamente algebraica, estará el reto de minimizar el trauma de dejar atrás las matemáticas más utilizadas hasta ese momento, la aritmética, y comenzar con esta nueva faceta abstracta.

El caso de las ecuaciones de segundo grado es mucho más intuitivo, visual y claro, al utilizar el famoso método griego del algebra geométrica, tan común y que tantos frutos ha dado en nuestra historia: planteamiento algebraico y resolución geométrica. Lo que haremos es simplemente completar cuadrados, algo que numéricamente tiene una gran dificultad para la práctica totalidad del alumnado de la ESO. Sin embargo, hacerlo geométricamente provocó en nuestras alumnas y alumnos una gran simpatía que manifestaron varias quejas al llegar el momento de explorar la fórmula.

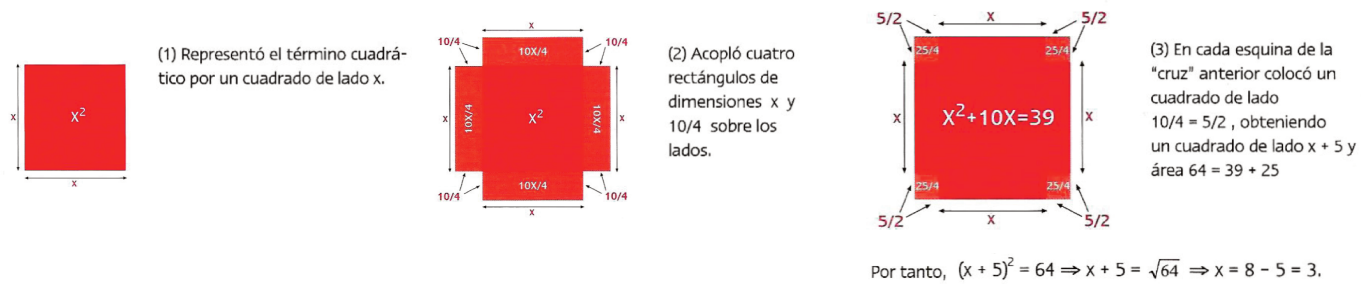


Figura 5. Resolución de al-Khwarizmi de la ecuación $x^2+10x=39$

Para las ecuaciones de la forma $x^2+bx-c=0$, el procedimiento es muy claro. Veámoslo en el caso de la ecuación $x^2+10x-39=0$, es decir, $x^2+10x=39$.

El primer término corresponde a la figura 6 que tan sólo necesita completarse con un cuadrado de $5\cdot 5=25\,u^2$ para obtener el cuadrado completo de lado $(x+5)^2$. Es decir, como la parte sombreada es 39, tenemos que:

$$(x+5)^2=39+25 \quad\Rightarrow\quad (x+5)^2=64 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+5=8 & \Rightarrow \quad x=8-5=3 \\ x+5=-8 & \Rightarrow \quad x=-8-5=-13 \end{cases}.$$

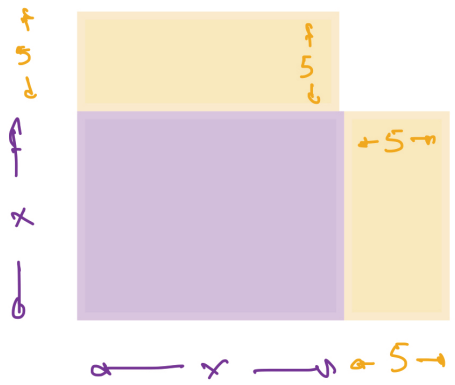


Figura 6

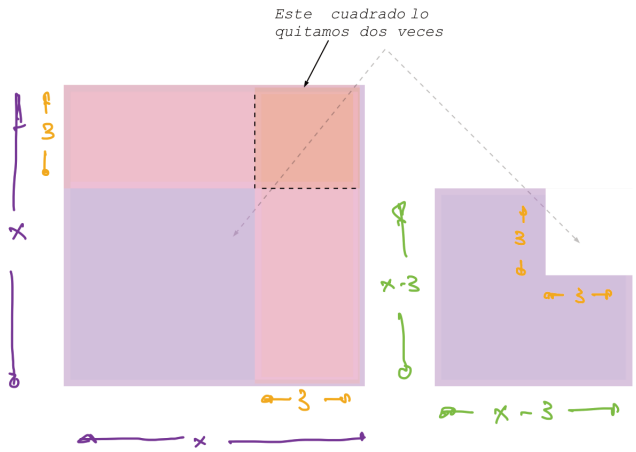


Figura 7

Para las ecuaciones de la forma $x^2-bx+c=0$, simplemente debemos tener en cuenta que en el término de la izquierda hay un cuadrado que se quita dos veces y tan solo debemos quitarlo una. Veámoslo en el caso de la ecuación $x^2-6x+5=0$, es decir, $x^2-6x=-5$.

El primer término se corresponde a la figura 7. Para completar el cuadrado es necesario añadir un cuadrado de $3\cdot 3=9\,u^2$ y se obtendrá entonces el cuadrado de lado $(x-3)^2$. Por tanto:

$$(x-3)^2=-5+9 \quad\Rightarrow\quad (x-3)^2=4 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2 & \Rightarrow \quad x=2+3=5 \\ x-5=-2 & \Rightarrow \quad x=-3+3=1 \end{cases}.$$

Evidentemente, así también resolveremos ecuaciones con una solución doble o sin solución y con fracciones o sin ellas. Ejemplos de esos casos se pueden encontrar en el material presentado en la IV JEMA.

Más métodos y más experiencias

Otro de los métodos utilizados en el aula, antes de introducir la transposición de términos para la resolución de ecuaciones, es el que el propio alumnado bautizó como el «método de las balanzas».

Esta actividad se podría hacer con balanzas didácticas, pero hemos optado por la balanza digital (figura 8) de Rafael Losada, para trabajar con GeoGebra.

Para resolver una ecuación tenemos que ir añadiendo o quitando cubos para poder averiguar el valor de la incógnita. Paralelamente los alumnos resuelven esta ecuación en su cuaderno. Aconsejamos escribir de colores distintos las cantidades que se añaden o se quitan para ir tomando conciencia de que la igualdad se mantiene.

Una vez asimilado cómo resolvemos las ecuaciones como si fuese una balanza, intentamos que los alumnos observen que, por ejemplo, +4 en el miembro de la izquierda está ahora

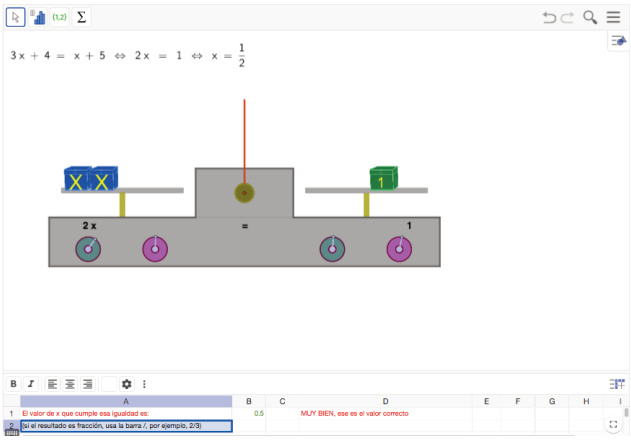


Figura 8. Balanza digital de Rafael Losada en GeoGebra

en el miembro de la derecha, pero con −4 o el +2 que multiplicaba todo el miembro de la izquierda, está ahora en el miembro de la derecha dividiendo.

Esto lo conseguimos gracias a preguntas del tipo: ¿hay alguna relación entre el +4 y el −4 de la ecuación?; ¿se te ocurre un procedimiento más rápido para resolver las ecuaciones? Los alumnos suelen darse cuenta de que al final siempre que tenemos un +4 y le sumamos −4 se anula, pero en el miembro de la derecha se queda este término por el que hemos sumado. Propiciando en la clase un ambiente de preguntas, entre todos se llega al acuerdo de lo que se conoce como la transposición de términos.

Y, ¿cómo trabajamos las ecuaciones de segundo grado?

Se pide a los alumnos calcular las dimensiones de la zona ajardina de la casa de Izarbe, sabiendo que todo el jardín tiene un área de 32 m^2 (figura 9).

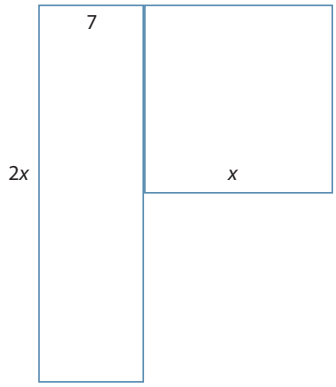


Figura 9. El jardín de la casa de Izarbe

A continuación, se les da la idea de cortar el rectángulo por la mitad para colocarlo como en la figura10.

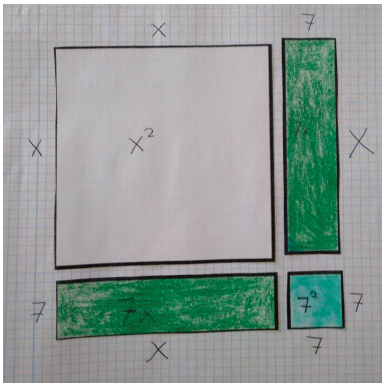


Figura 10

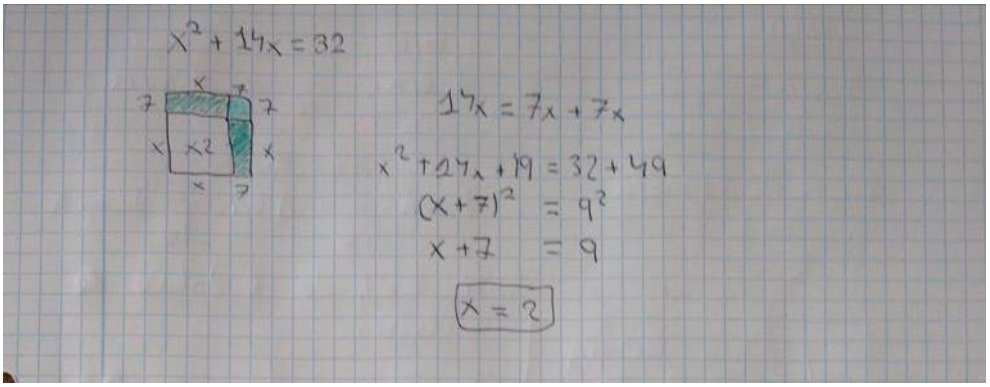


Figura 11

Con esta idea algunos alumnos suelen ver inmediatamente que necesitarían un cuadrado de 7 m de lado para conseguir un cuadrado mayor.

Con ayuda del papel demuestran al resto de la clase que es necesario añadir un cuadrado de área 49 m^2 para conseguir un cuadrado de lado $x + 7$. Y la pregunta que se le hace a continuación es, ¿cómo afecta esto a la ecuación inicial?

Como los alumnos resuelven las ecuaciones por el método de la balanza, ven claramente que, si suman 49 a un miembro, también deben sumarlo al otro. Además, como ya se ha trabajado previamente las identidades notables, identifican la que se nos queda y proponen resolver la ecuación como aparece en la figura 11.

Es cierto que en esta forma de razonar los alumnos solo obtienen la solución positiva, así que es el momento idóneo para recordar que los babilonios tenían este mismo problema: como trabajaban con áreas y longitudes, sus incógnitas eran solo positivas. Se les explica a los alumnos que si prescindimos del problema asociado a la geometría también tienen sentido las soluciones enteras.

Con el tratamiento del álgebra basado en problemas, balanzas y geometría vemos que se incide en:

— La atención a la diversidad. Los alumnos con más dificultades se enganchan muy rápido a la resolución de ecuaciones ya sea por medio de la balanza, por pintar y recortar figuras geométricas, por construir, etc. Los alumnos con más capacidad matemática solicitan más ecuaciones para resolver y, de hecho, se plantean otras ecuaciones.
— Con este tratamiento del álgebra todos los alumnos han trabajado activamente. Les ha atraído el «juego» de quitar y poner platillos, así como la construcción de cuadrados.
— Se comprende lo que se hace. No hay recetas ni aprendizaje memorístico.

Y los momentos que no olvidaremos son:

— Se han creado corrillos sobre la resolución o estrategias para resolver las ecuaciones.
— Los alumnos piden resolver más ecuaciones así.
— Los alumnos nos dicen que las clases de esta manera, «molan».

Con este trabajo hemos querido romper con la idea de que las matemáticas son simplemente recetas. Las matemáticas se tocan y se construyen para resolver los problemas.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1994), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos.
Gasca, M. (1987), *Cálculo numérico: Resolución de ecuaciones y sistemas*, Ed. Librería Central
Hersh, R., y V. John-Steiner (2012), *Matemáticas: una historia de amor y odio*, Ed. Crítica.
Hormigon, M. (1995), *Paradigmas y Matemáticas: un modelo teórico para la investigación en historia de las matemáticas*, Cuadernos de Historia de la Ciencia, 8. Universidad de Zaragoza.
Meavilla, V. (2013), *¿Cuánto vale la X?,* Ed. Almuzara.
Orts, A. (2007), «Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un método histórico», *Suma*, 56, 55-61.
Santcliment, F. (1998), *Summa de l'art d'Aritmètica*, Eumo Editorial.
Sessa, C. (2007), *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas,* Libros de Zorzal.
Sigler, L. E. (2003), *Fibonacci's Liber Abaci: A Traslation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer.
Vallejo, J. M. (1840), *Matemáticas puras y mistas. Tomo I*, Imprenta Garrasayaza.
VV. AA. (2008), *El rostro humano de las matemáticas*, Ed. Nivola.
Balanza digital de Rafael Losada en Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/dw99fHKB#material/nfED2UTg>.

1 Cita obtenida de (Hersh y John-Steiner, 2012).

2 Hay que tener en cuenta que este trabajo se presentó en marzo de 2021. Se refiere al curso 19-20 y 20-21.

3 Explica el método simple en las páginas 115r-117v y el compuesto en las páginas 119r-123r.

4 En clase se puede (se debe) pedir al alumnado que propongan ellos posibles soluciones iniciales para realizar los cálculos y utilizar estás cuestiones para plantear el sentido o sinsentido de determinadas soluciones en los problemas. Seguro que no nos extrañará que un alumno o alumna proponga un paso de 1 cm. Por otro lado, aunque elija cada persona una solución inicial distinta, comprobaremos que obtenemos siempre la misma solución final. Es decir, aunque les sorprenda, ¡los problemas no se resuelven sólo de una forma!

Estrategias de resolución en un problema sobre probabilidad condicional en la XXIX Olimpiada aragonesa

por

J. M. Rubio-Chueca, José M.ª, Muñoz-Escolano, Pablo Beltrán-Pellicer

(Universidad de Zaragoza)

En el currículo estatal y autonómico aragonés la probabilidad condicional aparece explícitamente en 4.º de ESO. Queda fuera de toda duda que se trata de una de las nociones básicas de probabilidad que todo estudiante de secundaria debería comprender, bien por su importancia e interés en la estocástica, como por los potentes razonamientos informales que se sustentan alrededor de ella (Borovcnick, 2012). Sin embargo, junto con la idea de independencia de sucesos, los problemas asociados a la probabilidad condicional constituyen una fuente habitual para la expresión de sesgos de razonamiento y de dificultades para el alumnado (Batanero, 2014). Por otro lado, como varios elementos sobre los que se construye la idea de probabilidad condicional aparecen desde el comienzo de la secundaria (por ejemplo, tablas o diagramas de árbol), una pregunta que nos podemos plantear es si el alumnado es capaz de desarrollar estrategias intuitivas en situaciones donde aparecen sucesos condicionados. Si esto fuera así, estas estrategias podrían servir de base para el diseño de secuencias didácticas (Martínez-Juste y otros, 2015).

Teniendo esto en consideración, resulta particularmente interesante analizar el siguiente problema, propuesto en la final de la XXIX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón:

olimpiada Matemática aragonesa XXIX

Fase Final

22 de mayo de 2021

Problema 3 *Película al azar*

Pilar quiere ver una película en una plataforma de streaming de TV con sus dos amigos Jorge y Julia, pero no saben cuál elegir. A Pilar se le ocurre lo siguiente:

—Vamos a utilizar el azar para la elección de la película. Para ello introduciremos unas bolas en dos bolsas de la siguiente manera. En la bolsa A introduciremos 3 bolas blancas y 4 negras, mientras que en la bolsa B introduciremos 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Una vez introducidas las bolas, Jorge cogerá una bola de la bolsa A y la introducirá en la bolsa B. Finalmente, Julia extraerá una bola de la bolsa B y si la bola es blanca veremos la película "Hero-n" y si es negra veremos la película "Escuela de Rubik"—

Sin embargo, Pilar tiene una duda: con esta forma de elegir la película que van a ver, ¿las dos películas tienen la misma probabilidad de ser elegidas o hay alguna de ellas que tiene más probabilidad?

Número

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Respuesta razonada

Contexto y participantes

Este año, debido a la situación sanitaria extraordinaria vivida por la pandemia, en la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO participaron finalmente cuarenta y siete alumnos y alumnas de distintas localidades de Aragón (Sierra, 2021). Esta fase final de la olimpiada autonómica se llevó a cabo el sábado 22 de mayo de 2021 en el aula magna de la Facultad de Ciencias. En ella, se propusieron seis problemas durante dos sesiones, de una hora cada una, con contenidos relacionados con el currículo utilizando los estudiantes para resolverlos diferentes procedimientos interesantes de analizar.

Tipos de estrategias en las respuestas correctas de los participantes

De forma verbal e intuitiva

La resolución a dicho problema se puede llevar a cabo con un razonamiento verbal, desde un significado intuitivo de la probabilidad. Para ello, suponiendo que las bolas son indistinguibles, se ha de observar lo que ocurre en los casos:

— Caso 1: sacar bola blanca en la bolsa *A* e introducirla en la *B*.
— Caso 2: sacar bola negra en la bolsa *A* e introducirla en la *B*.

En el primer caso, la probabilidad de sacar bola blanca en la extracción de la bolsa *A* es menor que la de sacar bola negra, puesto que hay menos bolas blancas. Entonces, al pasar una bola blanca a la bolsa *B* nos encontramos con que habrá 4 bolas blancas y 2 negras. Por lo tanto, la probabilidad de sacar bola blanca en la urna *B* es mayor puesto que habrá más bolas blancas.

En el segundo caso, la probabilidad de sacar bola negra en la bolsa *A* es mayor que la de sacar bola blanca. Al pasar una bola negra a la bolsa *B* tendremos el mismo número de bolas blancas que de negras, por lo que la probabilidad de sacar bola blanca en la bolsa *B* es la misma que sacar bola negra en la *B*.

Como en uno de los casos es más probable terminar sacando una bola blanca de la bolsa *B* y en el otro es igual de probable sacar bola blanca que sacar bola negra, se deduce que en términos globales es más probable sacar bola blanca.

En el análisis de las resoluciones del alumnado se contabilizan diez participantes que utilizaron un razonamiento verbal de tipo similar. Cuatro de ellos dieron una solución correcta al problema sin hallar ningún tipo de probabilidad, como la estrategia seguida por el estudiante que se muestra en la figura 1. Para argumentar el resultado no le ha sido necesario calcular ninguna probabilidad. Simplemente ha tenido en cuenta el número de bolas que aparece en la bolsa *B* una vez introducida la bola que se haya obtenido de la bolsa *A*. Para dicho participante, el hecho de ser más probable obtener una determinada bola depende del número de bolas que haya de cada color (a mayor número de bolas más probabilidad de obtener esa bola).

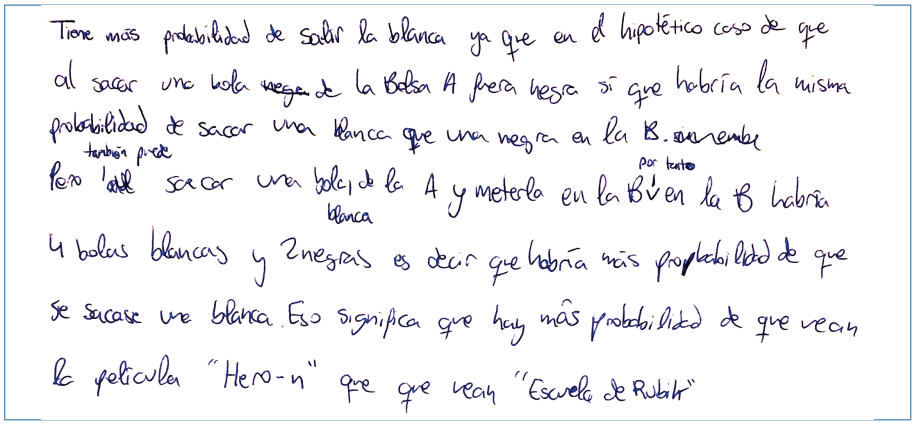

Tiene más probabilidad de salir la blanca ya que en el hipotético caso de que al sacar una bola ~~negra~~ de la Bolsa A fuera negra sí que habría la misma probabilidad de sacar una blanca que una negra en la B. ~~[illegible]~~ Pero también puede sacar una bola blanca de la A y meterla en la B por tanto en la B habría 4 bolas blancas y 2 negras es decir que habría más probabilidad de que se sacase una blanca. Eso significa que hay más probabilidad de que vean la película "Hero-n" que que vean "Escuela de Rubik"

Figura 1. Resolución correcta usando un razonamiento verbal cualitativo

Y seis de ellos, aunque no se pedía explícitamente el cálculo de probabilidades, calcularon algunas como el que se muestra en la figura 2 para dar soporte a su razonamiento. El estudiante se apoya en el conocimiento de la probabilidad simple observando los resultados en cada una de las situaciones que nos podemos encontrar: pasar una bola negra de la bolsa *A* a la bolsa *B* o pasar una bola blanca de la bolsa *A* a la bolsa *B* calculando las probabilidades de obtener bola blanca en la bolsa *B* en cada caso (probabilidades condicionales).

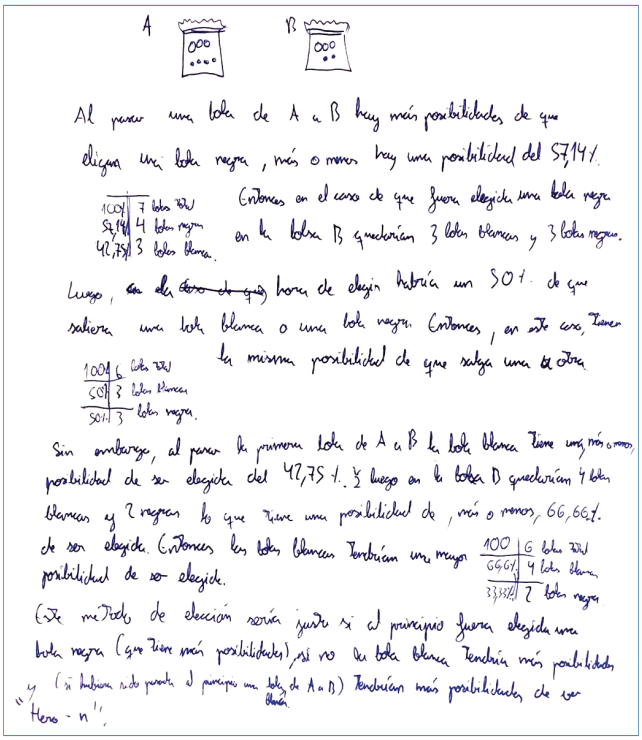


Figura 2: Resolución correcta usando un razonamiento verbal cuantitativo (probabilidades condicionales)

Resulta curioso que, de los diez estudiantes que emplean este enfoque intuitivo, la mayoría (seis) se vea en la necesidad de ofrecer algún dato cuantitativo y calcular las probabilidades de algunas de las extracciones previas o finales, a pesar de que no era necesario realizar ninguno de esos cálculos para resolver correctamente el problema, como hemos visto en las producciones que seguían una estrategia cualitativa. Quizás el motivo de este fenómeno pueda situarse en la asunción implícita por parte de los estudiantes de ciertas cláusulas del contrato didáctico escolar habitual (y que también puede estar vigente en las olimpiadas) como que, para resolver cualquier tarea de matemáticas, sea obligatorio operar con números del enunciado para dar un resultado numérico al problema.

Desde el significado clásico

Otra forma de resolver el problema sería desde el significado clásico de la probabilidad, calculando la suma de las probabilidades de las intersecciones, obtenidas a su vez empleando las probabilidades condicionadas. Es decir, la probabilidad de terminar sacando una bola blanca de la bolsa *B* es igual a la suma de las probabilidades de obtener bola blanca en cada uno de los dos casos posibles. Para simplificar la notación, designaremos por *bA* al suceso «sacar blanca en la bolsa *A*», *nA* al suceso «sacar negra en la bolsa *A*», *bB* al suceso «sacar blanca en la bolsa *B*» y *nB* al suceso «sacar negra en la bolsa *B*». Simbólicamente:

$$p(bB) = p(bA \Rightarrow bB) + p(nA \Rightarrow bB) = p(bA)\cdot p(bB/bA) + p(nA)\cdot p(bB/nA) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

$$p(nB) = 1 \Rightarrow p(bB) = 1 \Rightarrow \frac{4}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

Comparando ambas probabilidades se confirma que sacar bola blanca es más probable, por lo que *Hero-n* tiene una probabilidad mayor de ser la película elegida.

Ocho de los participantes aportaron una resolución correcta usando el cálculo de las probabilidades condicionadas e intersecciones de esta manera, como se puede ver en la figura 3, para finalmente sumar las probabilidades. En este caso, se observa que el participante se apoya en un diagrama de árbol y halla todas las probabilidades de forma correcta para dar su resultado.

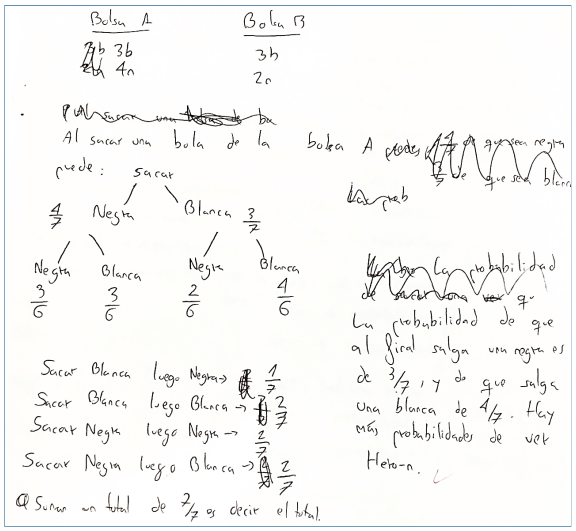


Figura 3. Resolución correcta usando cálculo de probabilidades condicionadas e intersecciones

Mediante técnicas combinatorias

Dos de los participantes utilizaron técnicas combinatorias para elaborar todas las posibilidades que encontramos en el espacio muestral del experimento. Este tipo de resolución se fundamenta en considerar como espacio muestral el conjunto de posibles resultados: $E = \{NN, NB, BN, BB\}$ y contabilizar el número de casos para cada uno de ellos. Este proceso de conteo no es trivial, ya que exige distinguir los dos posibles escenarios, dependiendo de si la bola que pasa de una bolsa a otra es blanca o negra.

De esta manera, hay 12 combinaciones de tipo *NN* (sacar bola negra en la bolsa *A* y bola negra en la bolsa *B*), que surgen de combinar las 4 bolas negras de la bolsa *A* con las 3 bolas negras que habría en la bolsa *B* al pasar una de esas bolas negras. Análogamente se obtienen 12 combinaciones de tipo *NB*, 6 de tipo *BN* y 12 de tipo *BB*. En total hay 42 casos posibles, acabando en 24 de ellos (la suma de *NB* y *BB*) con la extracción de una bola blanca en la bolsa *B*. Considerando que todos estos casos son equiprobables, se obtiene que acabamos con bola blanca con una probabilidad de 24/42.

Los dos participantes que emplearon una técnica de este estilo se apoyaron en algún tipo de representación (diagramática y tabular) para hallar sus resultados. En la figura 4 podemos ver cómo el alumno utiliza un diagrama de árbol para hallar el recuento de todas las posibilidades que nos podemos encontrar averiguando el espacio muestral del experimento aleatorio: «extraer una bola de *B* una vez que hemos pasado una bola de la bolsa *A*». De forma similar, en la figura 5 se observa cómo el participante usa una tabla con el mismo fin.

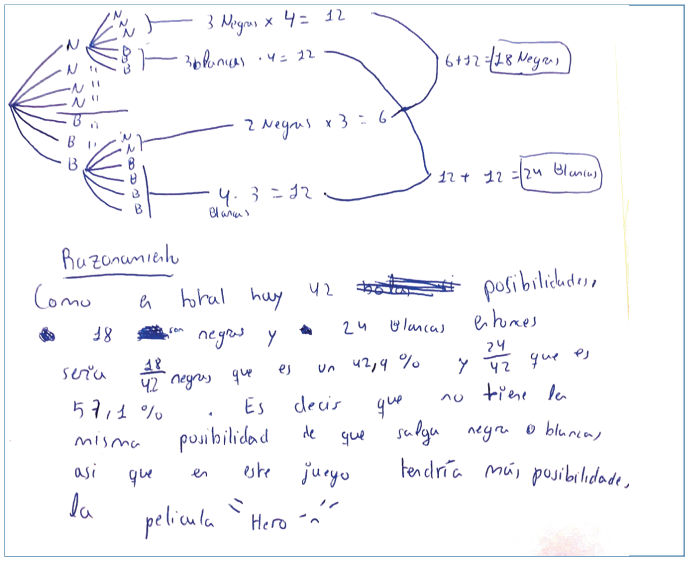


Figura 4. Resolución correcta usando técnicas combinatorias (diagrama de árbol)

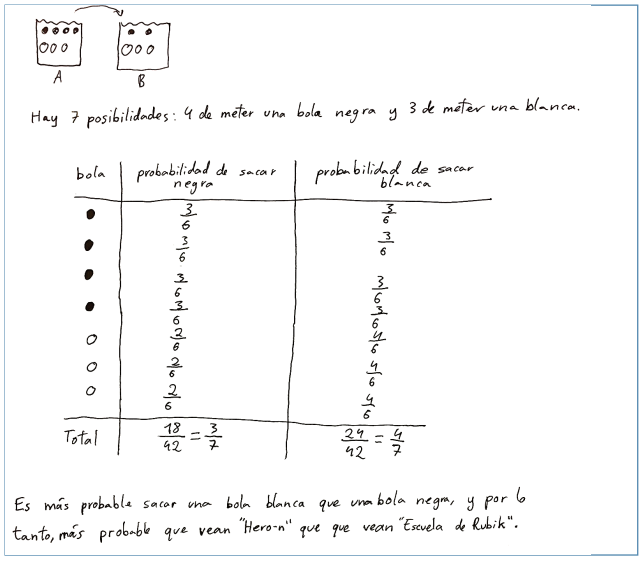


Figura 5. Resolución correcta usando técnicas combinatorias (tabla)

Una especie de ábaco probabilístico

Uno de los participantes utilizó una estrategia muy interesante, que recuerda a un ábaco probabilístico (Engel, 1975, 1976), a pesar de no incluir una representación gráfica, como vemos en la figura 6. Podemos imaginar este ábaco en forma de árbol, como el de la figura 3, solo que, en lugar de emplear sus ramas para representar probabilidades, lo que hacemos es introducir por su entrada un número de cuentas o fichas e irlas distribuyendo por las ramas. La elección del número inicial de fichas no es trivial, ya que debe permitir la distribución de cantidades enteras de fichas por todas las ramas del árbol (ábaco).

En la figura 6 vemos cómo el participante calcula el mínimo común múltiplo del número de bolas en la primera bolsa y la segunda obteniendo 42. Para llegar a este 42 es imprescindible considerar esa bola que pasamos de la bolsa *A* a la *B*. Es decir, el 42 se obtiene multiplicando las 7 bolas que hay en la bolsa *A* y las 6 que hay en la *B* cuando hemos pasado ya una de las bolas de la bolsa *A*. Una vez ha obtenido ese número, el participante analiza lo que «se esperaría» si se repitiera el experimento 42 veces, lo cual es equivalente a ver la distribución esperada de 42 fichas que circulasen por una especie de máquina de Galton con las probabilidades adecuadas en las intersecciones. De esta forma, en la primera etapa, deduce que salen 3/7 de 42 = 18 bolas blancas y 4/7 de 42 = 24 bolas negras de la primera bolsa. En la segunda etapa, de esas 18 bolas blancas, 4/6 de ellas (es decir, 12) darán lugar a una extracción de bola blanca en la bolsa *B*, mientras que 2/6 de las 18 (es decir, 6) darán lugar a una bola negra. Por otro lado, de las 24 bolas negras, 3/6 de 24 =12 darán lugar a una bola blanca y otras 12 a una bola negra. En definitiva, se concluye que de los 42 intentos, 24 dan lugar a bola blanca frente a 18 que dan lugar a bola negra, por lo que es más probable terminar extrayendo bola blanca de la urna *B*.

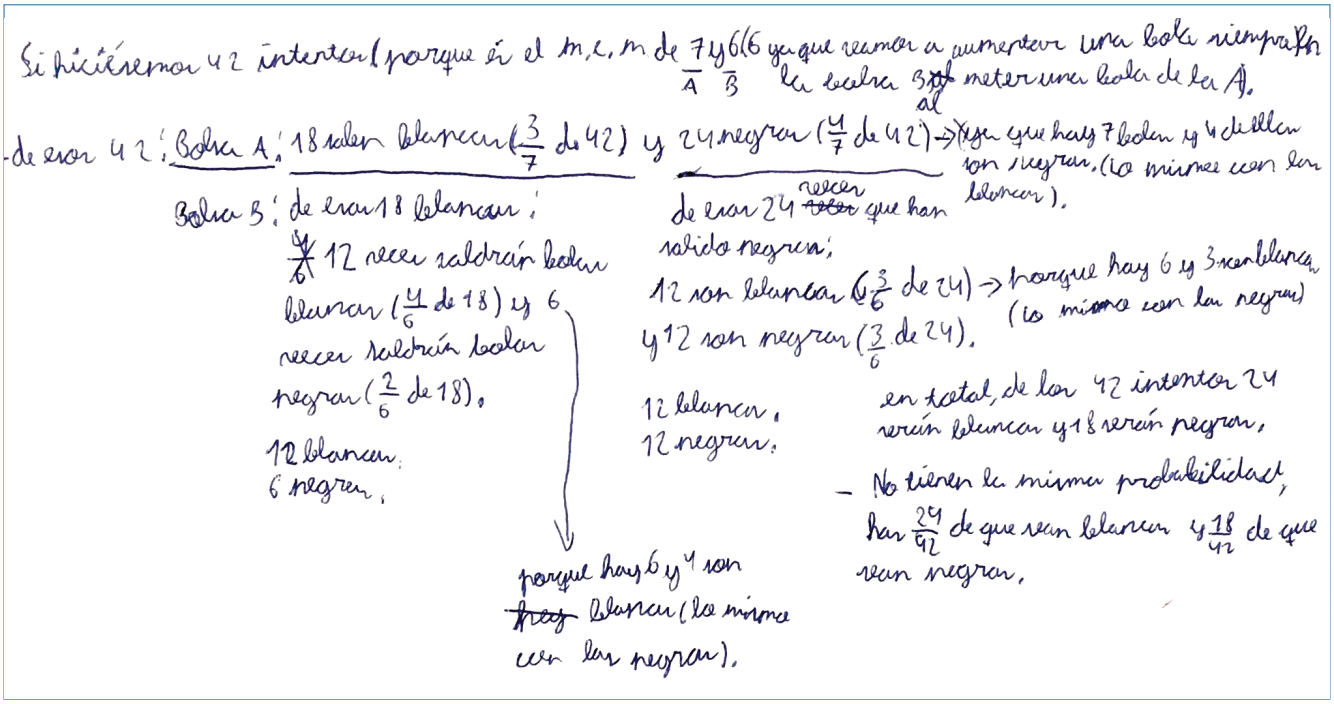


Figura 6. Resolución correcta usando ábaco probabilístico

Conclusiones

En la tabla 1 resumimos los resultados del análisis realizado. Teniendo en cuenta que la probabilidad condicional no aparece de forma explícita en los cursos de 1.º y 2.º de ESO en el currículo, sorprende ver el uso del diagrama de árbol para representar intersecciones y probabilidades condicionadas. Se trata de las resoluciones menos argumentadas por parte de los participantes y podría ser indicativo de haber recibido instrucción específica en este sentido, ya que se trata de una técnica estándar.

Estrategia utilizada	*Número de participantes*
Razonamiento verbal cualitativo	4
Razonamiento verbal cuantitativo. Cálculo de probabilidades condicionadas e intersecciones	68
Técnicas combinatorias	2
Enfoque frecuencial similar al ábaco probabilístico	1
Otras estrategias (incorrectas)	25
Soluciones en blanco	1

Tabla 1. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias ($N=47$)

Tras el análisis de las resoluciones, es importante destacar que los resultados obtenidos muestran razonamientos informales de los estudiantes muy interesantes que pueden ser incorporados de manera previa al estudio formal de la probabilidad condicional.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2014), «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Dordrecht.

Borovcnick, M. (2012), «Multiple perspectives on the concept of conditional probability», *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5–27.

Engel, A. (1975), «The probabilistic abacus», *Ed. Stud. Math.*, 6(1), 1–22.

— (1976), «Why does the probabilistic abacus work?» *Ed. Stud. Math.*, 7(1– 2), 59–69.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén, (2015), «Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 351-359.

Sierra, D. (2021), «Crónica», *Entorno Abierto*, 40, 1–2.

Operaciones básicas: sumas y restas con recuentos

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Las situaciones de aula en las que hay que realizar un recuento para resolver una cuestión son habituales en Educación Infantil. Estos recuentos con números naturales forman parte de los contenidos que se trabajan con más intensidad en la etapa.

Cuando estos conteos ya se ejecutan de forma segura, el siguiente paso va a ser utilizarlos para introducir las operaciones de suma y resta. Estas operaciones como tales no aparecen en el currículo de Infantil, puesto que no se considera propio de estas edades el dominio de la tabla de sumar ni la abstracción que supone el algoritmo de las operaciones. Sin embargo, sí que podemos introducir al alumnado en el significado de las operaciones de suma y resta si las abordamos a partir de recuentos, técnica que ellos ya dominan. Por supuesto, estamos hablando de alumnado de 2.º o 3.º curso del segundo ciclo.

La propuesta pasa por introducir estas operaciones desde contextos próximos al alumno, llevándolo ante situaciones que, para ser resueltas, requieren contar los elementos de conjuntos que ya han sido parcialmente contados. Estas situaciones se darán cuando se busca el cardinal resultante de acciones como añadir (suma) o quitar (resta) elementos de un conjunto, juntar (suma) o separar (resta) los elementos de varios conjuntos de cardinal conocido o emparejar los elementos de dos conjuntos para conocer el cardinal de los que se quedan sueltos.

Todas estas acciones se pueden resolver únicamente con recuentos, pero si se realizan con frecuencia resultan largas y tediosas. Es entonces cuando aparecen las operaciones de suma y resta como un medio de evitar recuentos en situaciones parcialmente cuantificadas. Es decir, cuando se conocen previamente los cardinales de los conjuntos con los que estamos añadiendo–quitando, juntando–separando o emparejando.

Si vamos un paso más allá, podemos realizar actividades de descomposición de números como sumas de otros. El descubrimiento de que la obtención de un número como suma de otros no es única amplía la comprensión de esta operación, e igualmente es una actividad que se puede abordar desde los recuentos.

El planteamiento y la resolución de todos estos tipos de situaciones aditivas, siempre ligadas a un contexto cercano, va haciendo evolucionar las técnicas de recuento que emplean, al tiempo que desarrollan estrategias para la obtención y memorización de la tabla de sumar.

Estas estrategias pasan por la modelización de las cantidades y relaciones entre estas que se dan en las situaciones planteadas (Carpenter, 1999). Los niños representan las cantidades con objetos tangibles susceptibles de ser contados mediante técnicas físicas (separación, marcaje, etc.) y desarrollan técnicas como el recuento a partir de un sumando ya conocido (el primero o, más adelante, el mayor), el recuento hacia atrás desde el minuendo hasta el sustraendo (en el caso de algunas restas) o el recuento de lo que queda tras emparejar los elementos, entre otras técnicas.

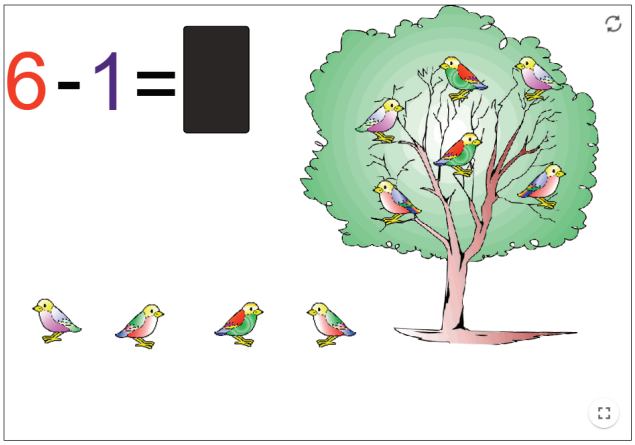
La selección de materiales desarrollados con GeoGebra que presentamos a continuación muestra cómo se pueden trabajar estas estrategias de conteo para llegar a la suma y la resta, haciendo uso de tecnologías digitales. Como ya hemos comentado en otras ocasiones en esta sección, estos materiales son un complemento al trabajo manipulativo con materiales físicos que, de nuevo, resulta insoslayable en el proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos. Consideramos que la principal ventaja que ofrecen estos materiales es la posibilidad de compartir

con el grupo clase la resolución de las situaciones, fomentando la verbalización de los procesos y el intercambio con los demás alumnos de opiniones, formas de resolver y conclusiones.

Hemos agrupado los materiales en función de las acciones que nos llevan a las operaciones de suma y/o resta. Todas ellas están reunidas en el libro Operaciones básicas.

Añadir (suma) o quitar (resta) elementos de un conjunto

Coloca los pájaros



En esta actividad se trabajan las sumas y restas a partir de un escenario en el que aparece un árbol con pajaritos en sus ramas. El tipo de operación y las cantidades que aparecen son aleatorias.

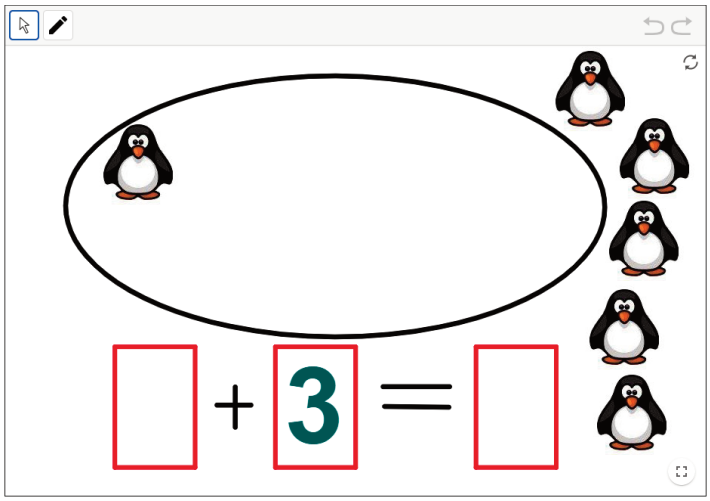
En el caso de que la operación sea una suma, el primer sumando, que aparece en rojo, coincide con el número de pajaritos que hay en el árbol. El alumno deberá arrastrar al árbol la cantidad de pajaritos que aparece en el segundo sumando, en lila, y contar la totalidad de los pájaros del árbol. Entonces, con el teclado escribirá esta cantidad en el recuadro gris y, si es correcta, aparecerá un mensaje de confirmación y refuerzo.

En el caso de que sea una resta, el número de pajaritos que aparece en el árbol es el minuendo (en rojo). Los alumnos tendrán que arrastrar la cantidad de pájaros que indica el sustraendo (en lila) fuera de las ramas y escribir con el teclado el número de pajaritos que nos quedan al final en el árbol. Al igual que en el caso de la suma, la actividad se autocorrige.

En ambos casos, el alumnado empleará la técnica de recuento de todo para obtener el resultado de la suma. Es una de las pocas actividades de MatemaTICinfantil con respuesta automática.

Suma de pingüinos

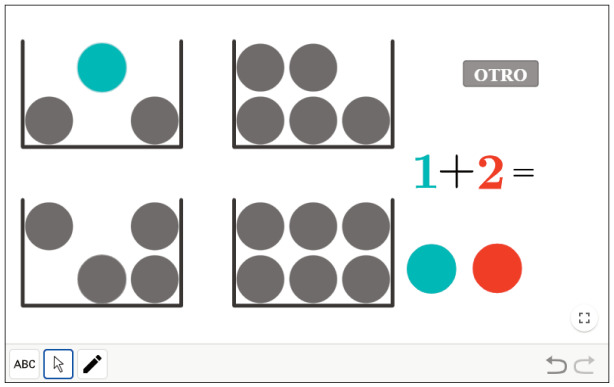
En la actividad aparecen dos elementos aleatorios: el número de pingüinos que hay dentro del conjunto y uno de los términos de la suma planteada. Lo que deben hacer los niños es contar el número de pingüinos que hay dentro y escribirlo en el otro término de la suma. Luego meterían dentro tantos pingüinos como indica el primer número. La técnica para obtener la suma podría ser el recuento de todos (más sencillo) o el recuento del sumando menor a partir del sumando mayor (más compleja, pues requiere comenzar el conteo en un número distinto de 1, pero más eficaz, pues es más breve).



Juntar (suma) o separar (resta) los elementos de varios conjuntos de cardinal conocido

Elige la caja y suma

En esta actividad se ofrecen cuatro cajas con hasta seis círculos grises y una suma formal, así como una colección de círculos de dos colores. Los niños deben elegir cuál de las cajas pueden utilizar para, haciendo el conteo de todos los círculos que contiene, obtener el resultado de la operación. Para ello, irán probando, colocando tantos círculos del color correspondiente como indica cada sumando. Deberán elegir la caja que les permite cubrir todos los círculos grises. Después, con el recuento de todo, obtienen el resultado de la suma y lo escriben al final de la expresión formal. Mediante el botón OTRO se genera una nueva situación.

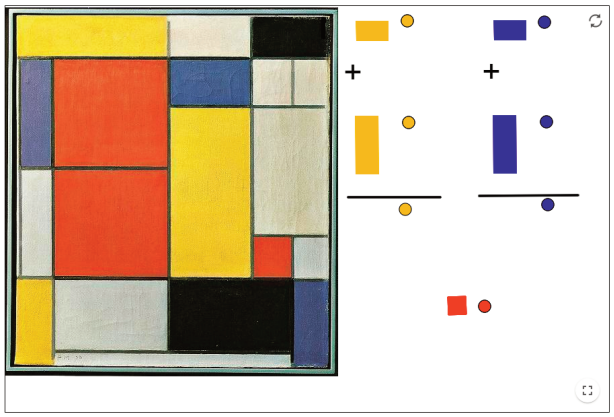


Suma con estrellas

Esta sencilla actividad nos presenta un escenario en el que, de forma aleatoria, aparece una suma formal, cuyo resultado oscila entre 2 y 9, que los niños deben resolver. Para lograrlo, disponen de una serie de estrellas que pueden ir arrastrando debajo de los números, a modo de material no estructurado que les permite desarrollar la técnica del recuento de todo, si colocan bajo los números tantas estrellas como indican estos, o bien la técnica del recuento de un sumando a partir del otro si cuentan las estrellas a partir de uno de los dos sumandos (el primero o el mayor, según el grado de competencia de los alumnos). La observación de la técnica usada por nuestros alumnos para resolver esta actividad nos permitirá valorar su estado de aprendizaje. Al principio usarán el recuento de todo, es decir, colocarán bajo cada cifra el número de estrellas que representa y luego las volverán a contar todas para obtener el resultado de la suma. Cuando hayan usado esta técnica muchas veces, se espera que se percaten de que la primera cifra ya les da el cardinal del primer conjunto, por lo que no tienen que reunir y contar las estrellas correspondientes: comenzarán el recuento en dicho cardinal, colocando tantas estrellas como indique el segundo. En este caso han economizado esfuerzo, pues se reduce el número de recuentos que realizan. Por último, al reiterar este proceso varias veces verán que si en lugar de comenzar el recuento en el primer sumando lo hacen en el mayor (que puede ser el primero o el segundo) el recuento del otro sumando es más breve.

Contar y sumar Mondrian

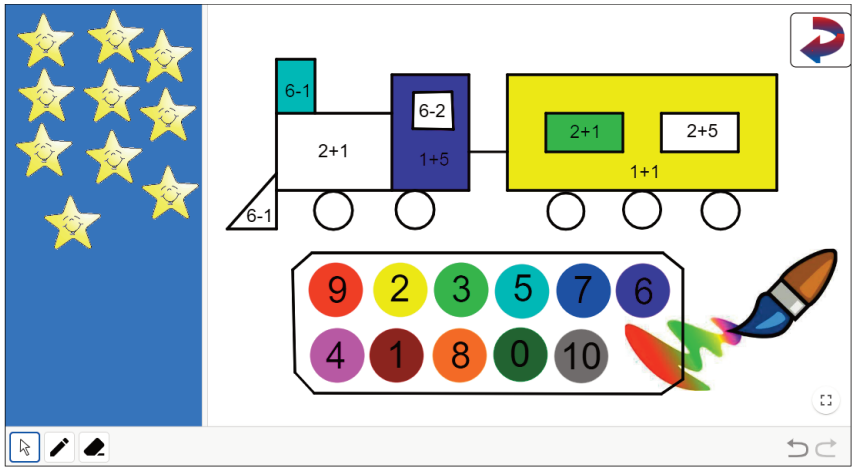
En este caso se trabaja sobre una obra de Piet Mondrian conformado por rectángulos de distintos tamaños, orientaciones y colores. Los niños deben diferenciar las distintas orientaciones y colores, y contar el número de unidades que tienen los mismos valores. Después, arrastrando los puntos de color, escriben manualmente las cifras resultantes de este recuento y, finalmente, realizarán la suma planteada por alguna de las técnicas comentadas en las aplicaciones anteriores. El trazado de las cifras se realiza a partir de los puntos de colores.



Colorea el tren

Al acceder a la actividad aparece un tren formado por figuras geométricas en cuyo interior hay diferentes sumas y restas formales que el alumnado debe resolver. Como apoyo, en la parte izquierda de la pantalla disponen de un grupo de estrellas que harán las veces de objetos auxiliares movibles para efectuar los recuentos.

El alumno deberá de realizar cada operación y según el resultado de la misma elegir el color correspondiente con un clic y colorear el polígono con otro clic. Si es una resta, se espera que aparte primero tantas estrellas como indica el minuendo y de ese grupo retire tantas como indica el sustraendo. Si es una suma, apartará tantas como indica uno de los sumandos y añadirá después tantas como indica el segundo.

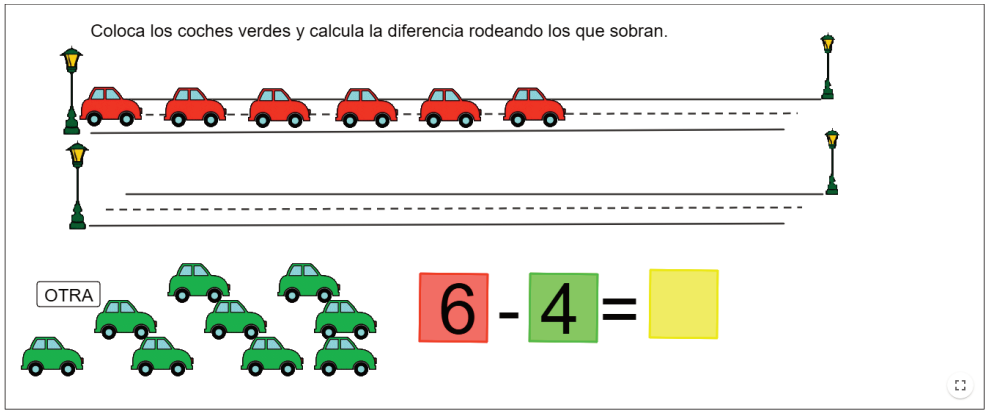


Las ruedas se pueden colorear libremente o siguiendo el criterio que el profesor indique (elegir colores de números pares, colores que no se hayan utilizado, etc.).

Emparejar los elementos de dos conjuntos para conocer el cardinal de los que se quedan sueltos

Coches

En esta ocasión, el escenario nos muestra una resta formal y dos carreteras. En la de arriba aparecen entre 5 y 9 coches rojos colocados en fila. En la de abajo, vacía, debemos colocar tantos coches como indica el sustraendo (en verde), de manera que queden emparejados con los coches rojos. Así, para obtener el resultado de la resta, bastará con hacer el recuento de los elementos que han quedado sin emparejar. Si se requiere ayuda en este último recuento, se puede emplear la técnica de marcar los elementos contados mediante la herramienta lápiz.



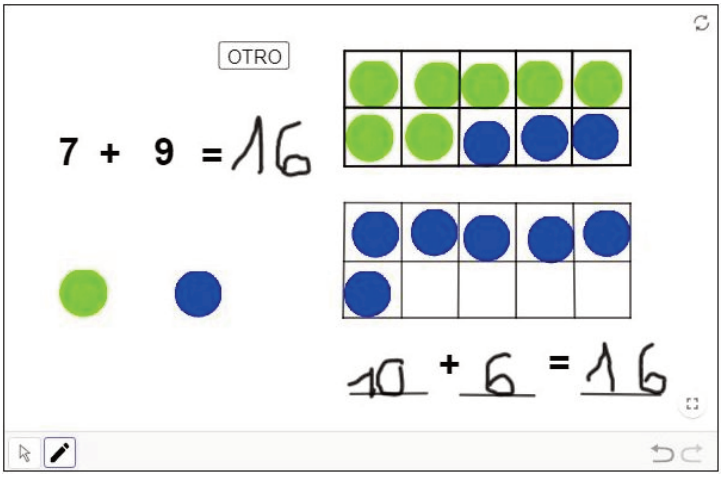
Descomponer un número como suma de otros

Hasta el 5

Esta actividad nos muestra un paisaje nevado en el que encontramos esquimales con sus perros. Cada vez que se inicia la actividad aparece el número 3, 4 o 5 y el mismo número de perros dos veces, uno a cada lado del iglú. El niño debe de repartir los animales entre los grupos de niños que hay debajo de dos formas distintas, lo que genera dos descomposiciones distintas del número. Una vez distribuidos, los recuenta y anota los números en la operación indicada en la parte superior. Permite comprobar la propiedad conmutativa de la suma.

Sumas agrupando decenas

Esta aplicación proporciona un material similar a las llamadas plaquetas de Herbinière-Lebert en la pizarra digital. En la pantalla aparecen dos rejillas de 5×2 y una colección de círculos de dos colores. Se propone una suma formal cuyos sumandos son menores que 10 y los niños deben representar cada número con círculos de un color en una de las rejillas. Una vez hecho esto, tomando círculos de la rejilla inferior (segundo sumando) completarán hasta 10 la rejilla superior (primer sumando), con lo que visualizan la técnica de cálculo mental de completar a 10. Finalmente, simbolizan en la parte inferior la suma mediante la escritura formal. Pulsando el botón OTRO se propone otro ejercicio.



Conforme los niños van dominando esta técnica, se espera que comiencen a completar la plaqueta del número más grande (no necesariamente el primero) con círculos del pequeño, por economía de tiempo.

Al concluir el ejercicio, los niños obtienen el mismo número (la solución) como resultado de dos sumas distintas, una de las cuales siempre tiene como sumando el 10.

Este material permite además hacer una introducción racional de la decena, puesto que al final de la suma, si el resultado es mayor que 9, la plaqueta completa queda representada por el 1 (cifra de las decenas) y los círculos «sobrantes» por la cifra de las unidades.

La utilización en el aula de actividades como las de esta colección ayudan a que el alumnado adquiera el significado de la suma y de la resta. Una buena comprensión de las mismas nos llevará posteriormente a reducir los errores cometidos cuando se aborden los algoritmos correspondientes. Para mejorar el aprendizaje de la artimética, nunca mejor dicho, todo suma.

Referencias bibliográficas

Carpenter T.P., y otros (1999), *Children´s Mathematics. Cognitively Guided Instruction*, Heineman. Portsmouth, NH (Traducción de Castro, C. y Linares, M.: *Las Matemáticas que hacen los niños*).

Orden de 10 de marzo por la que se aprueba el currículo de la Educación Infantil (2008), Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón. BOA del 14-04-2008.

¿Es ¼ mayor o menor que ½? Dudas en el Siglo de Oro español

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Contar resulta, en cierto modo, consustancial al ser humano. El acto de contar lleva, a través de un proceso de abstracción, a la idea de los números naturales. En un contexto discreto, de colecciones de objetos, las operaciones básicas (cuando están permitidas), la relación de orden asociada a la cardinalidad, etc., tienen un sentido intuitivo muy claro.

Cuando se intentan utilizar los números naturales en el ámbito de la medida, que implica realizar y cuantificar comparaciones, surgen de forma también relativamente natural las fracciones. Históricamente, esto sucedió en un contexto geométrico y musical. Sin embargo, la mayor complejidad conceptual de este nuevo objeto matemático (que ahora llamamos números racionales) hace que se pierda en parte el sentido intuitivo sobre las operaciones, su orden, etc. Un ejemplo típico y clásico es el hecho de que, mientras en el ámbito de los números naturales el resultado de una multiplicación es siempre mayor que ambos factores, esto ya no sucede en el ámbito de los números racionales.

Hoy en día muchos alumnos siguen enfrentándose y superando, con mayor o menor dificultad, estos obstáculos. Como docentes no deben sorprendernos estas dificultades, puesto que en cierto modo reproducen las dificultades colectivas que se vivieron a lo largo del proceso que llevó a la creación y establecimiento definitivo del constructo de número racional.

La lectura de textos antiguos nos permite en ocasiones apreciar que, dificultades y «errores» que se encuentran en las aulas actuales, no hacen sino reproducir las mismas dificultades que encontraron sus autores o los mismos «errores» que estos cometieron. Desde nuestra posición experta es interesante comprender que, en cierto modo es «natural» que surjan estos obstáculos.

Resulta relativamente habitual encontrar dificultades asociadas a la relación de orden definida en los racionales. De ahí la pregunta que se hace en el título de este texto:

¿Es ¼ mayor o menor que ½?

Su respuesta resultará obvia para todos los lectores de este boletín. Quizás incluso crean que es imposible la duda. Sin embargo, parece ser que no es tan «evidente» a juzgar por el contenido de algunos conocidos textos de aritmética publicados en España durante el Siglo de Oro. De hecho, esta duda está íntimamente relacionada con la propiedad de la multiplicación que hemos mencionado anteriormente y, en concreto, con la necesidad de compatibilizar la relación de orden con las operaciones.

Gaspar de Texeda, en su *Suma de Arithmetica práctica y de todas Mercaderías con la Horden de Contadores* (publicada en Valladolid en 1546) realiza la siguiente afirmación:

> ½ veces ½ hace ¼, digo que ¼ es menor en cantidad denominativa que ½ pero es mayor en virtud y sustancia.

Texeda parece tener claro que la cantidad ¼ es menor que la cantidad ½, puesto que para él las fracciones suponen dividir un entero en partes y lógicamente las partes que salen al dividir en cuatro son más pequeñas que las que salen al dividir en dos. ¿A qué se refiere entonces Texeda con «virtud y sustancia»? Seguimos leyendo.

> Que sea mayor se prueba en el génesis donde dice crescite et multiplicamini [creced y multiplicaos] […] por lo cual parece el multiplicar crecer y aumentar. Quien dijere ¿qué es mayor un casar o un diamante? Dirás que el casar es mayor pero preguntado cuál es de más valor y estima y virtud dirás que el diamante, pues así es ¼ en virtud y en sustancia mayor que medio, aunque ½ es mayor en cantidad.

Resulta ciertamente sorprendente recurrir a la Biblia para justificar una afirmación matemática, pero hay que entenderlo como un recurso retórico y un intento de proporcionar al lector–estudiante un argumento que le permita encajar dos hechos contradictorios: que multiplicar siempre aumenta y que el resultado es más pequeño en cantidad.

No obstante, el propio autor parece que no está del todo satisfecho y recurre a otro tipo de argumentos. Conforme los va desgranando se percibe casi una lucha interna y se pueden apreciar distintas ideas y concepciones asociadas a la naturaleza de los distintos tipos de objetos involucrados. Por ejemplo, leemos lo siguiente:

> Pongo el cuadrado *ab* por cada lado 8, tomo ½ y es 4 y así el menor cuadrado por cada lado tiene 4. Multiplica un lado de los menos con otro, es a saber 4 veces 4, es 16 por el menor cuadrado, digo que 16 es ¼ de todo el cuadrado.

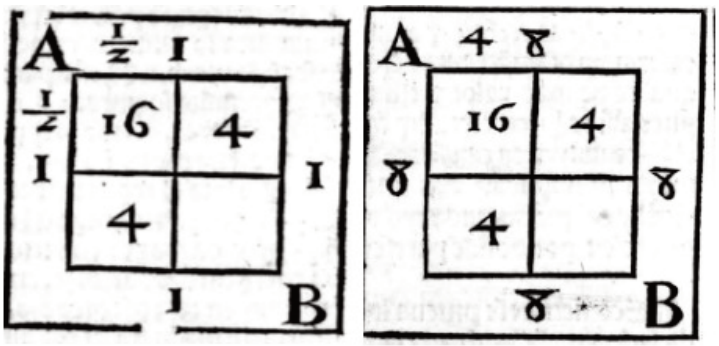


Figura 1

En este fragmento, que va acompañado de varias figuras (ver figura 1), se aprecian dificultades a la hora de distinguir entre la fracción como cantidad de magnitud o como cantidad relativa. Texeda parece concluir (aunque no está del todo explicitado) que 16 (¼ del cuadrado) es mayor que 4 (½ del lado).

Pero, a continuación, se recurre a otro argumento:

> Pruebo como ½ sea mayor en extensión que ¼ por la definición de multiplicar, que dice que multiplicar no es otra cosa salvo hallar un número tercero en el cual tantas veces el uno de los multiplicantes se halle como unidades hay en el otro […] en el ¼ el ½ cabe tantas veces como unidades hay en el otro ½ […] así pues si el ¼ es igual al ½ de ½, menos es que ½ y parece ser mayor el ½.

Resulta muy interesante aquí que Texeda no recurra a la definición de multiplicación como suma reiterada, que es justamente la que lleva a la idea de que multiplicar aumenta, sino a una alternativa que sí parece servirle.

En todo caso, y por si las dudas fueran pocas, encontramos la siguiente argumentación adicional:

> Otros suelen probar ¼ ser mayor que ½ diciendo que todo número cuanto más se aparta de su principio o nacimiento, que es la unidad, tanto es mayor. Así, 3 es más que 2 porque el 3 más se aparta de la unidad que 2. Así por el contrario ¼ se aparta más de la unidad que ½ y por esta razón parece verdadero que ¼ es mayor que ½.

Este fragmento también resulta interesante porque saca a la superficie de forma explícita la necesidad de definir la relación de orden con la que estamos trabajando. De hecho, si llamamos ≤ a la relación de orden «usual» en los racionales, el fragmento define una nueva relación R del siguiente modo:

$$aRb \Leftrightarrow |a-1| \leq |b-1|.$$

El lector puede dedicar un rato a investigar sus propiedades.

El texto de Texeda es relevante por la gran variedad de argumentos, en sentidos contrarios, que se presentan en un espacio muy corto (apenas 3 páginas). No obstante, este tipo de argumentos «contradictorios» no es poco común en esa época. De este modo, en el S*umario breve de la practica de la Aritmethica*, publicado en Zaragoza en 1515, y escrito por el sacerdote zaragozano Juan Andres, leemos (figura 2):

> Digo que multiplicando quebrado solo por quebrado solo siempre sale el producido menos que no cualquiera de los dos quebrados, pero siempre aumenta la tal multiplicación y no mengua.

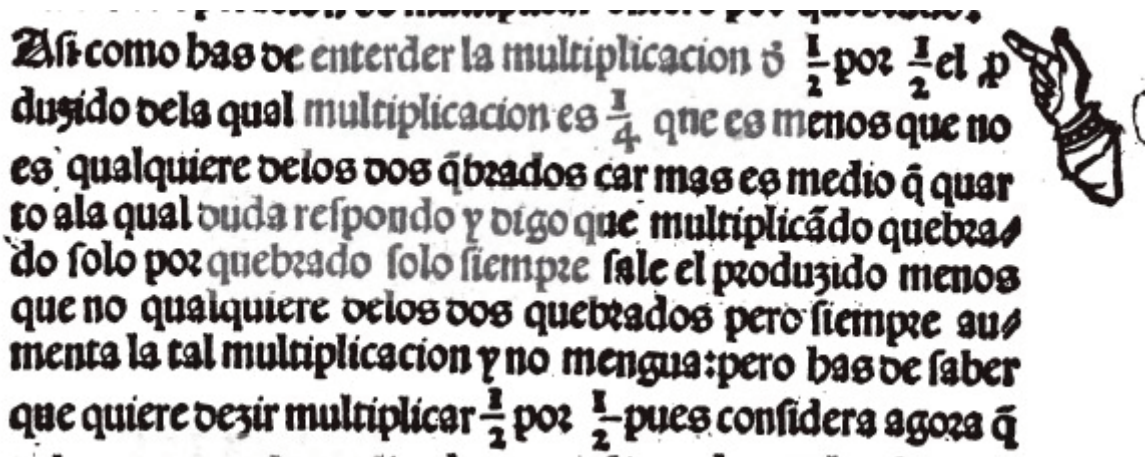

Asi como bas de enterder la multiplicacion ó $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ el p
dusido dela qual multiplicacion es $\frac{1}{4}$ qne es menos que no
es qualquiere delos dos q̃brados car mas es medio q̃ quar
to ala qual duda respondo y digo que multiplicãdo quebra
do solo por quebrado solo siempre sale el produzido menos
que no qualquiere delos dos quebrados pero siempre au
menta la tal multiplicacion y no mengua: pero bas de saber
que quiere dezir multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ pues considera agora q̃

Figura 2

Esta sorprendente afirmación requería una aclaración, y el mosén la proporciona en un contexto comercial:

> Pues considera agora que tú has comprado medio codo de Holanda a razón de medio florín el codo y quieres saber qué monta el medio codo a razón de medio florín el codo valiendo el medio florín 8 dineros […] Pues multiplica agora medio codo por el precio de medio florín y hecha la práctica sale y produce ¼ que es un cuarto de florín que vale 4 dineros […] donde parece que multiplicando medio codo por medio florín sale un cuarto de florín y así digo que la operación aumentó y no menguó.

Con todo lo insatisfactorio que puede resultar este confuso fragmento, pone de manifiesto de nuevo las dudas del autor, la necesidad de compaginar concepciones contradictorias sobre las operaciones y la naturaleza de los objetos implicados, las dificultades a la hora de distinguir entre cantidades absolutas y relativas y de manejarlas simultáneamente en un problema, etc.

En casi cualquier aritmética práctica del siglo XVI podemos encontrar fragmentos similares a estos, por lo que las dificultades parece que eran generalizadas. Resulta de gran interés observar la gran variedad de argumentos: basados en la geometría, en la definición de las operaciones o de la relación de orden, en contextos comerciales, incluso teológicos.

Como docentes, conocer y entender el origen de toda esta variedad de dificultades, obstáculos, contradicciones, etc., presentes en la historia resulta indispensable para poder comprender el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos puesto que, en muchos casos, sus dudas reproducen las surgidas siglos atrás.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Noviembre de 2021
ISSN: 2386-8821e