Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 45
Marzo de 2022

Cuando este boletín se está distribuyendo (31 de marzo) los compañeros del IES Benjamín Jarnés de Fuentes de Ebro están ultimando los detalles para celebrar la XXI edición del concurso matemático «Carlos Pina». Si ya en condiciones normales la organización de un evento de este calibre supone un importante esfuerzo y dedicación de horas *personales,* la situación actual aún añade más dificultades.

Desde la SAPM lo sabemos porque también en estos momentos estamos cerrando las inscripiciones de las tres olimpiadas que convocamos este curso. En realidad, podríamos decir que es una olimpiada con tres niveles, ya que tanto la de primaria como las dos de la ESO van a celebrar la fase final y la semifinal en las mismas fechas. En el caso de la final, también será en el mismo lugar: la Facultad de Ciencias. Evidentemente, centralizar la semifinal en un mismo espacio es imposible. De hecho, conseguir sedes y repartir los niveles es uno de los mayores problemas que han tenido los compañeros que están asumiendo las principales tareas de organización. Pedimos comprensión por los problemas que esto pueda generar y por las restricciones de participación. De sobras es conocido que la olimpiada de 2.º de ESO (la que llevamos organizando muchos años) ha sido siempre muy abierta. Creo que no es necesario que dé explicaciones de porqué en estos dos últimos cursos no ha podido ser así.

También se ha cerrado el plazo de presentación de radionovelas matemáticas para el concurso que se organiza dentro del programa del Departamento de Educación «Conexión Matemática». Ahora toca esperar el fallo del jurado. Una vez más, hay compañeros poniendo de su tiempo.

Para acabar, quisiera recordar que seguimos en marcha con la semana aragonesa de matemáticas en la calle. Se celebrará la semana del 9 al 15 de mayo y aún hay tiempo si algún centro más se quiere animar. De cualquier provincia y localidad, pero echamos de menos especialmente a Huesca capital. Los centros que actualmente están preparando esta actividad son: de Jaca el IES Pirineos; de Albarracín el IES Lobetano; de Monreal del Campo el IES Salvador Victoria; de Teruel la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Zaragoza, el IES Vega del Turia y el IES Santa Emerenciana; de La Almunia de Doña Godina el IES Cabañas y Salesianos; de Calatayud el IES Emilio Jimeno; y de Zaragoza el IES Tiempos Modernos, la Asociación SESDOWN, el IES Clara Campoamor, el CPI El Espartidero, el IES Pilar Lorengar, el Colegio María Auxiliadora, el Colegio Sagrado Corazón de Jesús y el IES Goya.

Daniel Sierra Ruiz
Presidente de la SAPM

Σrio Interactivo

Crónica del seminario de la FESPM Matemáticas inclusivas – Parte I
Clases divulgativas – Parte I
La estrella mudéjar: en 3.º de principio a fin
Habilidades lógicas: decantación y clasificación
Líneas trigonométricas desaparecidas
Un problema de reparto inversamente proporcional en la XXIX Olimpiada aragonesa

únete
a la SAPM
click

Crónica del seminario de la FESPM *Matemáticas inclusivas* – Parte I

por
Pablo Beltrán-Pellicer
(Universidad de Zaragoza)

El pasado mes de noviembre, en pleno temporal de lluvia, granizo y nieve, a un puñado de docentes de matemáticas no se les ocurrió otra cosa que recluirse un fin de semana en un hotel en Castro Urdiales para trabajar y reflexionar sobre inclusión. Hay películas que comienzan con premisas muy parecidas y que no terminan demasiado bien. Sin embargo, el tema del último seminario organizado por la FESPM da motivos para la esperanza. Debe haberla, si lo que queremos es avanzar hacia una educación inclusiva para todos y todas. En general, claro. Y la enseñanza de las matemáticas no es una excepción.

Iniciamos con este artículo la crónica, en tres partes, del seminario *Matemáticas inclusivas*, organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con la colaboración del Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) y del Ministerio de Educación y Formación Profesional y que tuvo lugar los días 26, 27 y 28 de noviembre de 2021. Aderezamos la crónica-resumen con algunas reflexiones sobre este tema, que resulta de una gran trascendencia en nuestra labor como docentes.

Figura 1. Asistentes al seminario federal en la sede del CIEM de Castro Urdiales

Objetivos y programa del seminario

La coordinación del seminario corrió a cargo de María Teresa Navarro Moncho, de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwārizmī». Ya en el programa se plantean dos preguntas fundamentales, para cuya respuesta habremos de reflexionar acerca de qué son las matemáticas y, más aún, cómo ha de ser su aprendizaje. ¿Son las matemáticas una disciplina de selección y exclusión social? ¿El conocimiento matemático se sigue considerando un privilegio de unas pocas personas o se considera un derecho de todos?

El derecho a la educación a todas las personas queda recogido en la propia Constitución española. Por supuesto, es un elemento fundamental en la Declaración de los Derechos del Niño de 1959 y, más recientemente, vuelve a aparecer como uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible. Parece claro que, hoy en día, una persona matemáticamente competente tendrá más oportunidades profesionales. Por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas no puede ni debe estar reservado para unos pocos elegidos. Y, mucho menos, convertirse en un arma de exclusión social. Así que todas las personas deberían tener la oportunidad y el apoyo necesario para aprender significativamente unas matemáticas comunes y fundamentales, con ideas poderosas.

La comunidad de docentes e investigadores en educación matemática no es ajena a estas cuestiones. Tal y como se recoge en el propio programa del seminario, desde el NCTM (2014) se afirma que, para garantizar el éxito matemático para todos, los programas escolares de matemáticas han de considerar cinco elementos esenciales:

— Un compromiso con la equidad y el acceso.
— Un currículo sólido.
— Herramientas y tecnología apropiadas.
— Una evaluación significativa y concordante.
— Una cultura del profesionalismo.

Hablar de acceso y equidad en el aula de matemáticas es hablar de que todo el alumnado pueda participar de modo significativo en el aprendizaje de las matemáticas. Desde este punto de vista, no todo vale. Son estas cuestiones las que dan lugar a los objetivos del seminario:

— Reflexionar sobre las tareas y el uso de los materiales manipulables y la tecnología como recursos esenciales en un aprendizaje significativo de las matemáticas para todo el alumnado.
— Analizar el papel que juegan la detección precoz de las dificultades específicas de aprendizaje, el talento matemático y las necesidades de apoyo educativo en el acceso y la equidad en la enseñanza de las matemáticas.
— Reflexionar sobre el papel de la evaluación formativa como medio para la mejora de la educación matemática.

Sesiones de los grupos de trabajo

La planificación original del seminario consideraba tres grupos de trabajo, dedicados a los siguientes aspectos:

— *Grupo 1.* Características de las tareas adecuadas para fomentar una enseñanza inclusiva de las matemáticas. Materiales manipulativos y tecnológicos apropiados.
— *Grupo 2.* Análisis de las dificultades específicas de aprendizaje y las necesidades de apoyo educativo para planificar acciones que garanticen que cada alumno se vea a sí mismo capaz de utilizar su conocimiento matemático para dar sentido a los problemas del mundo que le rodea.
— *Grupo 3.* Enfoque y funciones de la evaluación como componente fundamental para garantizar el éxito en la competencia matemática para todo el alumnado.

Debido a motivos organizativos, los participantes nos dividimos en dos grupos, de manera que uno estaría trabajando sobre las características de las tareas inclusivas, mientras que el otro se enfocaría en las dificultades específicas de aprendizaje y necesidades de apoyo educativo. La evaluación se abordaría de manera transversal tanto en uno de los grupos como en otro.

Conferencia a cargo de Concepción Barceló López y M.ª Teresa Navarro Moncho *¿Podemos ser promotores de oportunidades de aprendizaje de matemáticas en el marco de una escuela inclusiva?*

El viernes por la tarde fue la primera de las conferencias, orientada a poner sobre la mesa los elementos centrales del seminario. Es decir, de dónde partimos en la educación inclusiva, hacia dónde queremos ir y cómo podemos hacerlo. Concepción Barceló comenzó señalando que es mucho mejor hablar de *diferencias* de aprendizaje, en lugar

de hacerlo de *dificultades* de aprendizaje. La diferencia de matiz radica en que todos podemos aprender, de manera que el foco ha de ponerse en promover situaciones de aprendizaje para que todos podamos avanzar. Para ilustrar esto propuso la metáfora del jardín (figura 2), donde se contrapone la imagen de una plantación de lechugas, todas iguales, frente a un jardín donde convive una amplia variedad de plantas en proceso de floración.

Figura 2. ¿Plantación o jardín? (Fuente: presentación de C. Barceló y M.ª T. Navarro)

Muchas veces, al pensar en inclusión y atención a la diversidad se piensa en un sector concreto del alumnado, como si pudiésemos distinguir entre alumnado *normal* (sea lo que sea eso) y alumnado que no lo es. El caso es que no se puede hablar de inclusión educativa para referirnos solamente a cierta parte del alumnado. De hecho, resulta imposible hablar de educación si esta no es realmente inclusiva. En un aula típica de una escuela ordinaria nos encontramos con las siguientes prevalencias de alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo: discapacidad (1 %), altas capacidades (7 %), trastornos de la comunicación (4-6 %), trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH) (4-6 %), dislexia (10 %), discalculia (3-6 %). A todo esto, habría que añadir la natural diversidad de cada uno. Por lo tanto, ¿quién es ese alumnado *normal*?

La actual Ley de Educación (LOMLOE), que no hace sino modificar a la anterior ley (conocida como LOMCE), recoge específicamente el principio de inclusión y lo enfatiza a lo largo de su articulado:

> Por otra parte, la escolarización del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo deberá estar regida por los principios de inclusión y participación, calidad, equidad, no discriminación e igualdad efectiva en el acceso y permanencia en el sistema educativo y accesibilidad universal para todo el alumnado.

Más aún, el artículo 73 queda redactado de la siguiente forma, especificando qué es lo que se entiende por alumnado con necesidades educativas especiales (ACNEE):

> 1. Se entiende por alumnado que presenta necesidades educativas especiales, aquel que afronta barreras que limitan su acceso, presencia, participación o aprendizaje, derivadas de discapacidad o de trastornos graves de conducta, de la comunicación y del lenguaje, por un periodo de su escolarización o a lo largo de toda ella, y que requiere determinados apoyos y atenciones educativas específicas para la consecución de los objetivos de aprendizaje adecuados a su desarrollo.
>
> 2. El sistema educativo dispondrá de los recursos necesarios para la detección precoz de los alumnos con necesidades educativas especiales, temporales o permanentes, y para que puedan alcanzar los objetivos establecidos con carácter general para todos los alumnos. A tal efecto, las Administraciones educativas dotarán a estos alumnos del apoyo preciso desde el momento de su escolarización o de la detección de su necesidad.

Por lo tanto, de aquí se desprende que la normativa otorga una importancia especial a la detección de estas necesidades específicas y a su intervención temprana en el marco de una escuela inclusiva. Este énfasis vuelve a apreciarse en otros artículos de la ley (p. ej., artículos 74 y 79).

La ponente no dejó pasar la oportunidad de mencionar el reciente Real Decreto 984/2021, de 16 de noviembre, que establece el marco de evaluación para este curso y que recoge los aspectos comentados anteriormente. Por ejemplo, el artículo 4, sobre el derecho del alumnado a una evaluación objetiva:

> Las Administraciones educativas garantizarán el derecho del alumnado a una evaluación objetiva y a que su dedicación, esfuerzo y rendimiento sean valorados y reconocidos con objetividad, para lo que establecerán los oportunos procedimientos, que, en todo caso, atenderán a las características de la evaluación en las respectivas etapas conforme a la legislación vigente.

O el artículo 6, dedicado a la atención a las diferencias individuales en la evaluación:

1. En el marco de lo establecido por las respectivas Administraciones educativas, se establecerán las medidas más adecuadas para que las condiciones de realización de los procesos asociados a la evaluación se adapten a las circunstancias del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo. Estas adaptaciones en ningún caso se tendrán en cuenta para minorar las calificaciones obtenidas.

2. Igualmente, se promoverá el uso generalizado de instrumentos de evaluación variados, diversos y adaptados a las distintas situaciones de aprendizaje, que permitan la valoración objetiva de todo el alumnado.

3. Se establecerán medidas de flexibilización y alternativas metodológicas en la enseñanza y evaluación de la lengua extranjera para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo, en especial para aquel que presente dificultades en su comprensión y expresión.

4. Cuando las circunstancias personales del alumno o alumna con necesidades educativas especiales lo aconsejen para la consecución de los objetivos de la enseñanza básica, este alumnado podrá prolongar un curso adicional su escolarización. Estas circunstancias podrán ser permanentes o transitorias y deberán estar suficientemente acreditadas.

Con esto, quedaban claras las características de la atención a la diversidad y de la atención a las diferencias de aprendizaje en la escuela inclusiva. Desde mi punto de vista, no es otra cosa que la concepción del significado de *obligatoria*. Por supuesto, en la Educación Primaria, pero no debemos olvidar la O de la ESO. En este momento de la ponencia, Concepción Barceló utilizó un cuento a modo de metáfora, para señalar que nuestra actitud se puede enfocar en el *qué*, en el cómo o en el *para qué*. Para aquellos lectores que tengan curiosidad, se trata del *Cuento de los tres canteros*, pudiéndose encontrar fácilmente alguna versión en internet. No obstante, las claves son las siguientes:

— El primero de los tres canteros no ve sentido a su trabajo más que el de ganarse la vida. Se encontraba saturado en un trabajo que repetía monótonamente sin cuestionar nada más. Este cantero se preocupaba tan solo de las cosas que van surgiendo en el día a día, sin mirar más allá.
— El segundo cantero se preocupaba por hacer su trabajo de la mejor forma posible, de modo que el trabajo le brindara satisfacción personal.
— El tercer cantero tenía además la capacidad de ver la utilidad de su trabajo, mirando hacia el futuro. Estaba focalizado en el para qué, el propósito de su tarea más allá de la tarea individual en sí. Esta es la manera en que el cantero encontraba la automotivación verdadera en su trabajo.

Esto abre la puerta a identificar tres dimensiones en la escuela inclusiva. En primer lugar, prácticas que involucran, que se pueden asimilar a las pautas propias del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) (CAST, 2011). En segundo lugar, políticas que acompañan, es decir, políticas de centro -reflejadas en los documentos oficiales del centro- que estén orientadas a organizar y movilizar los recursos del centro y de su entorno (recursos personales, materiales, espaciales, temporales, etc.) para atender a la diversidad de maneras de aprender. Y, en tercer lugar, la creación de culturas que cuidan, cuyo objetivo sea la construcción de una escuela abierta, flexible y participativa, donde el alumnado se sienta feliz. Esta última dimensión está orientada a la creación de una comunidad acogedora, en el sentido más amplio del término, donde todos sus miembros son valorados y respetados y se tienen altas expectativas hacia todo el alumnado. Para ello hay que centrarse en las capacidades que posee cada alumno, en lugar de en las que no tiene.

Llegados a este punto, hemos de detenernos en las siglas DUA; esto es, en el Diseño Universal para el Aprendizaje (CAST, 2011). Es un marco tanto para el diseño curricular, como para el diseño e implementación de secuencias didácticas, que tiene en cuenta todos los componentes de un proceso de enseñanza y aprendizaje y que se basa en resultados de investigación. El objetivo es crear espacios en los que tenga cabida la diversidad y todos los estudiantes puedan aprender. En español, la web de referencia es la web educaDUA, nacida en el seno del proyecto DUALETIC, en el que participaron investigadores de diferentes universidades (Universidad Complutense de Madrid, Universidad de Alcalá de Henares y Universidad de Castilla - La Mancha). El proyecto contó con el apoyo de investigadores del CAST.

Se trata de entender la educación inclusiva como un derecho. Echeita y Ainscow (2011) profundizan en esta idea desde una posición generalista y plantean un marco de referencia y pautas de acción. Dicho marco asume que la

inclusión es un proceso que busca la presencia, participación y el éxito de todo el alumnado y que precisa la identificación y la eliminación de barreras. Además, recalca la necesidad de poner mayor énfasis en aquellos grupos de alumnos que podrían estar en riesgo de marginalización, exclusión o fracaso escolar. Otros libros con indicadores y pautas de orientación son la *Guía para la educación inclusiva* (Booth y Ainscow, 2015) o la guía de la UNESCO (2017). Respecto a esta última, no está de más recordar el cuarto de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS):

> Objetivo 4: Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.

A continuación, Concepción Barceló se detuvo en describir dos dificultades (diferencias) de aprendizaje: dislexia y discalculia. Siguiendo a Lyon, Shaywitz y Shaywitz (2003):

> Dislexia es una dificultad de aprendizaje específica de origen neurobiológico. Se caracteriza por dificultades en exactitud y/o fluidez en el reconocimiento de palabras escritas, por escasa habilidad en la escritura y decodificación. Estas dificultades son consecuencia de un déficit en el componente fonológico del lenguaje que es inesperado en relación con otras habilidades cognitivas y la educación recibida.

Después de hacer una pequeña dinámica en la que los participantes nos pudimos poner en la piel de un alumno con esta dificultad, la ponente pasó a describir la discalculia y algunos de sus indicadores, tomando como referencia la guía de trastornos del neurodesarrollo de la American Psychiatric Association (2014). La discalculia es un trastorno caracterizado por la presencia de dificultades en el procesamiento numérico y el cálculo, de modo que las actividades de la vida diaria se ven afectadas. Resulta oportuno recoger en esta crónica los indicadores de alerta que señaló Concepción Barceló en la charla. En Educación Infantil son los siguientes:

— Dificultades para contar.
— Errores en la escritura o en el nombre de los números inferiores a 10 (confunde 6 por 7; o seis por siete).
— Dificultad para clasificar objetos por forma o tamaño.
— Problemas para aprender a contar. Por ejemplo, no puede recordar los números en el orden correcto o cuando se le piden cuatro unidades solo es capaz de coger un puñado, en lugar de contarlas.
— Dificultad para entender términos relacionados con las matemáticas, como «más grande» y «más pequeño», «más que» o «menos que»…
— No puede entender la relación entre número y cantidad. Por ejemplo, no entiende que «4» se aplica a grupos de 4 pasteles, 4 coches o 4 amigos.

A su vez, en la etapa de Educación Primaria tendremos que estar atentos a:

— Dificultades para reconocer signos aritméticos.
— Fragilidad en el uso de hechos aritméticos según la edad: sumas simples (2+4) y tablas de multiplicar.
— Dependencia exagerada de dedos para contar.
— Cálculo mental y memoria mecánica deficitarios.
— Confusiones en la alineación de los números en una columna.
— Falta de adquisición del sistema de base 10.
— Errores en la conversión de unidades de medida.
— Errores de lógica o razonamiento: resultados incoherentes.
— Dificultades en la comprensión de enunciados de problemas.
— Pueden tener problemas para entender las horas o ubicarse espacialmente.
— Verbalizan sus dificultades: «No se me dan bien las matemáticas», «no me gustan las mates».

Finalmente, en Educación Secundaria, los indicadores de alerta son:

— Problemas para aplicar los conceptos matemáticos al dinero, incluida la estimación del coste total o el cambio exacto.
— Dificultades para entender la información que se muestra en los gráficos o tablas.
— Le cuesta aprender y comprender los métodos de razonamiento y los procedimientos de cálculo con varios pasos.

— Problemas para encontrar diferentes enfoques para el mismo problema matemático (falta de flexibilidad mental).
— Dificultad para medir los ingredientes en una receta simple o líquidos en una botella.

Igualmente, resulta interesante plasmar en esta crónica, ya que se mencionaron, los criterios diagnósticos de un trastorno específico del aprendizaje para la discalculia de la American Psychiatric Association (2014, 38-39):

A) Presencia de al menos uno de los siguientes síntomas que han persistido por lo menos durante 6 meses, a pesar de intervenciones dirigidas a estas dificultades:

— Dificultades para dominar el sentido numérico, los datos numéricos o el cálculo (p. ej., comprende mal los números, su magnitud y sus relaciones, cuenta con los dedos para sumar números de un solo dígito en lugar de recordar la operación matemática como hacen sus iguales, se pierde en el cálculo aritmético y puede intercambiar los procedimientos).
— Dificultades con el razonamiento matemático (p. ej., tiene gran dificultad para aplicar los conceptos, hechos u operaciones matemáticas para resolver problemas cuantitativos).

B) Las aptitudes académicas afectadas están sustancialmente por debajo de lo esperado según su edad cronológica e interfieren en el rendimiento académico o en actividades de la vida cotidiana y se confirman con pruebas estandarizadas.

C) Las dificultades de aprendizaje comienzan en la edad escolar, pero pueden no manifestarse hasta que la demanda de las aptitudes académicas supera las capacidades del individuo.

D) Las dificultades del aprendizaje no se explican por discapacidad intelectual, trastornos visuales o auditivos no corregidos, otros trastornos mentales o neurológicos, adversidad psicosocial, falta de dominio del lenguaje de instrucción académica o directrices académicas inadecuadas.

Los trastornos específicos de aprendizaje no son algo anecdótico. La prevalencia de estos trastornos en el alumnado en las áreas de lectura, expresión escrita y matemáticas es del 5-15 %, mientras que en la población adulta se estima en un 4 %. A pesar de estos porcentajes, que no son despreciables, estos trastornos siguen siendo grandes desconocidos en el ámbito social, lo cual provoca una serie de problemas. Sin ir más lejos, originan ansiedad. No el trastorno en sí, sino su desconocimiento, tanto por parte de la persona que lo sufre como por parte de su entorno. Las personas con trastorno piensan que son menos inteligentes que el resto y, por tanto, se frustran, experimentan cambios de humor, rechazo a las tareas escolares, somatizan todo ello con dolores de cabeza, contracturas, etc., y suele terminar en lo que se conoce como *indefensión aprendida*. Autores como Zuppardo y otros. (2017) constatan esta peor autoestima y problemas de comportamiento en alumnado con dislexia, con respecto a compañeros sin dificultades.

M.ª Teresa Navarro tomó el relevo en este punto de la conferencia para concretar cómo ser promotores de oportunidades de aprendizaje de matemáticas. La respuesta parece clara, con actividades abiertas, con múltiples puntos de entrada y dadas a la exploración, como los ejemplos que planteó sobre líneas poligonales y cálculo de áreas. En dichos ejemplos, el papel de los manipulativos es clave (en los ejemplos, geotiras como las de la figura 3, y geoplanos virtuales), pues actúan como facilitadores del aprendizaje, lo enriquecen.

La ponente aprovechó la ocasión para presentar el proyecto MatesGG, *Matemáticas con GeoGebra*, desarrollado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) en colaboración con el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF). El proyecto pone a disposición del profesorado una selección de materiales elaborados con la herramienta GeoGebra a través de unas guías didácticas creadas con la herramienta de autor eXeLearning. Todo el material está disponible en la página web del proyecto.

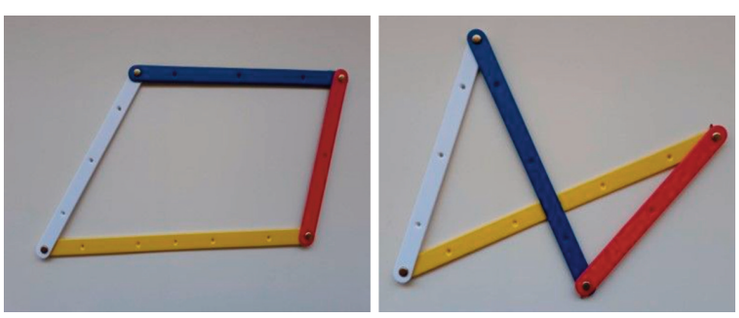


Figura 3. Líneas poligonales con geotiras (Fuente: presentación de C. Barceló y M.ª T. Navarro)

Después, M.ª Teresa Navarro mostró una propuesta de *canvas* (lienzo, plantilla) que permite diseñar actividades y tareas de aprendizaje accesible, a modo de facilitador para el profesorado. Este *canvas* propone tener en cuenta los siguientes aspectos:

— Objetivos y criterios de evaluación.
— ¿Cómo voy a motivar e implicar a mi alumnado? ¿Hay una actividad cero? ¿Se conecta con los conocimientos previos del alumnado?
— ¿Cómo se hará el seguimiento continuo y se dará *feedback* durante la tarea y en el proceso de enseñanza y aprendizaje?
— Acceso a la información. ¿Cuál va a ser el papel de los manipulativos?
— Procesamiento de la información.
— Expresión del conocimiento. ¿Cómo se comunican las reflexiones del alumnado? ¿Cómo se desarrolla el lenguaje?

La ponencia terminó señalando el papel fundamental de la evaluación. Esta debe servir para identificar los puntos débiles y guiar en su superación. Es decir, no debe limitarse a un papel certificador. Las indicaciones deben ser claras y específicas. El objetivo es que la evaluación debe permitir avanzar al alumnado. Para ilustrar esto, la ponente se apoyó del vídeo de *Austin y su mariposa*, en el que los sucesivos comentarios conducen a una mejora en el dibujo inicial que hace el niño. Finalmente, nos mostraron ejemplos de exámenes adaptados y no adaptados, donde lo esencial consiste en saber qué se quiere evaluar y no poner trabas innecesarias. No se trata de hacer exámenes diferenciados, puede ser (debe ser) el mismo examen para todos.

Conclusión

En siguientes entregas desgranaremos la conferencia *¿Qué recursos son adecuados para atender la diversidad?*, de Daniel Ruiz Aguilera, y la conferencia *¿Cuándo podemos afirmar que una práctica es inclusiva?*, de Begoña De la Iglesia Mayol. Al margen de las conclusiones oficiales, ya difundidas entre los miembros de la FESPM, podemos adelantar alguno de los temas clave. Por ejemplo, quedó bastante claro que una tarea o una actividad, por sí sola, no es inclusiva. Puede tener el potencial de serlo, sí, pero es la forma de presentarla, de construir el andamiaje y de gestionarla, lo que hará que sea inclusiva.

Referencias bibliográficas

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION (2014), *Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM-5: Spanish Edition of the Desk Reference to the Diagnostic Criteria From DSM-5*, American Psychiatric Pub.

BOALER, J. (2019), *Limitless mind: Learn, lead, and live without barriers*, Harper Collins.

BOOTH, T., y M. AINSCOW (2015), *Guía para la educación inclusiva: desarrollando el aprendizaje y la participación en los centros escolares,* FUHEM, OEI.

CAST (2011), *Universal Design for Learning Guidelines, version 2.0*, Center for Applied Special Technology.

— (2018), *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*, Center for Applied Special Technology, <http://udlguidelines.cast.org>.

ECHEITA, G., y M. AINSCOW (2011), «La educación inclusiva como derecho. Marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente», *Tejuelo*, 12, 26–46.

LYON, G. R., S. E. SHAYWITZ y B. A. SHAYWITZ (2003), «A definition of dyslexia», *Annals of dyslexia*, 53(1), 1-14.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL (2020), *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*.

— (2021), *Real Decreto 984/2021, de 16 de noviembre, por el que se regulan la evaluación y la promoción en la Educación Primaria, así como la evaluación, la promoción y la titulación en la Educación Secundaria Obligatoria, el Bachillerato y la Formación Profesional*.

NCTM (2014), *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston.

UNESCO (2017), *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación*.

ZUPPARDO, L., C. PIRRONE y F. SERRANO (2017), «Delimitando el perfil emotivo-conductual en niños y adolescentes con dislexia», *Retos XXI*, 1(1), 88-104.

Clases divulgativas – Parte I

por
M.ª Pilar Albert García
(IES Tiempos Modernos, Zaragoza)

La enseñanza de las matemáticas tiene, como uno de sus objetivos principales, «valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual…». En este artículo voy a relatar unas actuaciones que estoy poniendo en práctica este curso con mis dos grupos de 1.º ESO que en mi opinión contribuyen a lograr la consecución de este objetivo. Se trata de las llamadas *clases divulgativas*. Seguro que para la mayoría no es una idea nueva, y que muchos/as de vosotros/as ya la ponéis en práctica pero sin ponerle ningún título específico, pero igualmente quería escribir esto por si pudiera servir de (pequeña) inspiración a otros/as docentes.

En primer lugar, me gustaría comentar que mis dos grupos de 1.º son totalmente distintos entre ellos: uno, tiene un nivel académico general muy alto, con un alumnado (son 24) con unas ganas de aprender y de descubrir cosas nuevas que tengo que decir que pocas veces antes lo había visto; otro, con un nivel académico inferior, pero con un alumnado (son 18) que igualmente está abierto a escuchar y a tratar cosas diferentes a las que normalmente trabajamos en clase.

En segundo lugar, me gustaría decir que esta idea de las clases divulgativas surgió gracias a los propios alumnos/as, pues me hacían preguntas fuera del currículo que en mi opinión era mi obligación responder. Estaba segura de que alumnos/as tan curiosos iban a preguntarme en cada tema cosas nuevas, así que decidí reservar un espacio después de cada lección para hablar de algo que ellos/as me hubieran preguntado (y si no me habían preguntado nada en concreto, entonces tratar algo que tuviese que ver con lo que habíamos estudiado, pero que estuviera relacionado con historia de las matemáticas, o con curiosidades, o con biografías de matemáticos/as relevantes). Así nacieron como digo las clases divulgativas.

A continuación pongo como ejemplos dos de las clases divulgativas realizadas en esta primera evaluación, concretamente las relacionadas con los temas sobre los números naturales y números enteros y las potencias y raíces.

Comenzamos.

Tema 1: Números naturales y números enteros
Clase divulgativa 1: *El joven Gauss sorprende a su maestro*

Imaginaos la situación: al finalizar una de mis clases, les comento a mis alumnos/as que al día siguiente no traigan el libro, que traigan solo estuche y cuaderno, porque en la siguiente sesión vamos a hacer una clase divulgativa.

La primera pregunta por su parte obviamente es: «¿qué significa *divulgativa*?». A la que le sigue: «pero entonces… ¿mañana no damos clase?»

Empiezo entonces respondiendo a la primera: la definición de la RAE no les ayuda mucho: «publicar, extender, poner al alcance del público algo». Así que simplemente les digo que les voy a «contar cosas relacionadas con las matemáticas». Termino la clase aclarando que no, que al día siguiente no les voy a dar fiesta.

Así que en la sesión posterior ahí están mis alumnos/as, expectantes, a ver qué es eso que les voy a contar.

Comenzamos con una breve introducción al personaje: les enseño una foto de Gauss (les digo que se fijen bien en él, que seguro que más adelante lo van a ver en muchos libros, pues hizo grandes aportaciones a las matemáticas en muchos campos tales como geometría, estadística, análisis, álgebra…, les digo los nombres de estas áreas porque son las que a ellos/as les suenan.) Les comento que por ello es llamado «el príncipe de las matemáticas». Vemos que nació en abril de 1777 y falleció en febrero de 1855. De aquí, repasamos primeramente tres aspectos:

— Aritmética y resolución de problemas básicos (muy básicos): «¿A qué edad murió? Ojo al dar la respuesta, ¿había sido ya su cumpleaños o no?».
— Números romanos: 1777 está en el siglo XVIII, mientras que 1855 está en el siglo XIX. Los números romanos además de verlos en matemáticas los suelen tratar también en la materia de historia, así que les sirve de repaso para ambas.
— Aproximación de números naturales: si queremos redondear a las centenas, podemos decir que Gauss nació allá por 1700 y falleció allá por 1800. Además, al cabo de unos días les vuelvo a preguntar «¿recordáis cuando nació Gauss», a lo que la mayoría responden «era 1700 y algo…». La respuesta es perfecta porque es un ejemplo real de para qué se utilizan las aproximaciones (tal y como comentamos en clase, una aproximación es un número más manejable que sustituye a otro que, por tener más cifras (no nulas), es más difícil de recordar e incómodo de operar).

Continuamos la sesión diciendo que Gauss ya mostraba facilidad para las matemáticas desde pequeño, y les cuento la conocida anécdota que hace referencia a esto: cuando Gauss iba al colegio (tenía siete años), un día su profesor estaba un poco cansado y pidió a sus estudiantes que resolvieran un ejercicio que él pensaba que les iba a costar mucho tiempo realizar. Así, podría descansar un rato mientras su alumnado pensaba y pensaba. El ejercicio era el siguiente: «tenéis que calcular la suma de todos los números naturales desde el 1 hasta el 100». Gauss, en unos pocos segundos, se levantó y fue a dar la respuesta al profesor. Y aquí es cuando les digo yo a mis alumnos/as: «¿sabéis cómo lo hizo?».

La mayoría empieza a hacer las primeras sumas, con la esperanza de encontrar algún patrón que les dé una pista. Alguno/a agrupa algunos números sospechando que esa puede ser la clave… En cualquier caso, es muy interesante verles pensar y cómo interaccionan entre ellos/as mientras están intentando averiguar el resultado del ejercicio.

Al final de la clase, les doy la conocida solución: «si escribimos en una fila los números del 1 hasta el 50, y en la siguiente fila los números del 51 hasta el 100 (pero escritos esta vez de derecha a izquierda) y los sumamos dos a dos, cada suma es 101. Como tenemos 50 sumas, el resultado es 5 050»:

	1	2	3	4	…	…	…	48	49	50
	100	99	98	97	…	…	…	53	52	51
Suma "por parejas"	101	101	101	101	…	…	…	101	101	101
Suma total: 101*50 = 5050										

Tabla 1. Solución elemental al ejercicio «hallar la suma de los cien primeros números naturales»

Días después, en la prueba escrita sobre el tema de los números naturales, añado una pregunta opcional sobre esta clase divulgativa que suma (en caso de responderla de forma correcta, claro) 0,2 puntos a la nota obtenida en dicha prueba. Estas décimas no son gran cosa pero es cierto que a los alumnos/as les motiva: a los/as mejores, porque quieren la máxima nota posible o incluso alguno/a porque quiere ver si pasará del 10. A los/as que aprueban más justos/as… porque les gusta más obtener un 5 que un 4,8.

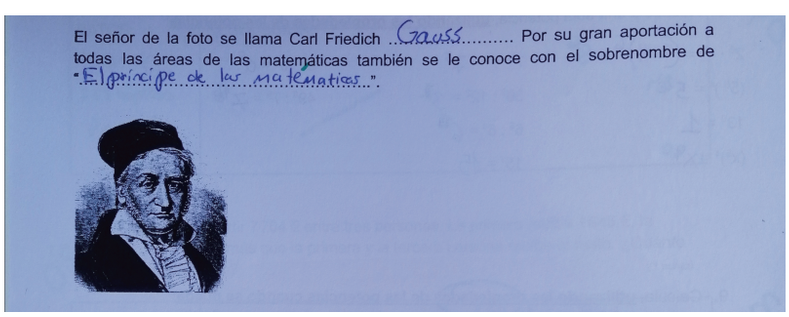


Figura 1. Pregunta adicional en prueba escrita de 1.º ESO y respuesta de uno de los alumnos/as

Tema 2: Potencias y raíces
Clase divulgativa 2: *¿Puede doblarse un folio por la mitad más de siete veces?*

Continuamos con la siguiente clase divulgativa, que tiene lugar al terminar el tema de raíces y potencias de números naturales y enteros. La sesión comienza conmigo entrando en el aula con una gran variedad de papeles: cartulina tamaño DIN A3, cartulina tamaño DIN A4, folios, hojas de cuaderno tamaño folio, hojas de cuaderno tamaño cuartilla, papel de cocina, papel de baño…

Entrego a cada alumno/a un papel, y les pido que lo vayan doblando, sucesivamente, por la mitad. Mientras lo van haciendo les pregunto que cuántas veces creen que lo van a poder doblar. Enseguida terminan y cada uno/a va diciendo cuántas veces ha doblado el papel y, casualmente, la respuesta es la misma en todos los casos: siete veces.

A continuación, voy preguntando a cada uno/a cuánto creen que mediría el grosor de un papel que hubiésemos podido doblar 54 veces. Y anoto todas las respuestas en la pizarra. La mayoría dicen medidas entre 5 cm y 30 cm. Incluso con decimales: 22,5 cm, etc. Hay un alumno que se atreve a decir «un metro», y todos/as los demás le tachan de exagerado.

Y es aquí cuando comienza la explicación, y así se la cuento:

— Suponemos que una hoja de papel tiene un grosor de 0,01 mm.
— Al doblarla, su grosor queda $2 \cdot 0{,}01$ mm. Es importante insistir aquí porque, si no ven esto (aunque es obvio, algunos/as no lo entienden a la primera), no entenderán el resto del razonamiento.
— Al doblarla de nuevo, su grosor queda $2 \cdot 2 \cdot 0{,}01$ mm.
— Al doblarla de nuevo, su grosor queda $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01$ mm.
— …
— Al doblarla 54 veces, su grosor queda $2^{54} \cdot 0{,}01 \approx$ (calculadora) 180 000 000 000 000 mm. Comentario:« ¡qué importante saber usar las potencias para no tener que escribir 54 doses!». Aquí aprovechamos para repasar la definición de potencia (multiplicación reiterada), base y exponente.
— Pasando el resultado a km, 180 millones de km.

Por suerte, en la materia de biología y geología han dado la definición de *unidad astronómica (UA)*; y la mayoría recuerda que 1 UA es aproximadamente 150 millones de kilómetros, es decir, la distancia de la Tierra al Sol. Así que ellos mismos/as se dan cuenta de que pasaríamos del Sol si pudiésemos hacer todos esos dobles con el papel.

Un alumno comenta que él había leído en algún libro de curiosidades matemáticas que la distancia obtenida tras hacer estos dobles era la equivalente a la distancia de la Tierra a la Luna, no al Sol. Estamos un tiempo debatiendo esto («¿será que nos hemos equivocado con los cálculos?») hasta que nos damos cuenta de que lo que pasa es que con un número menor de dobles, se llega a la Luna: aproximadamente, con 45 (y siempre suponiendo el grosor del papel de 0,01 mm).

De nuevo, días después, en la prueba escrita sobre el tema de las potencias y raíces, añado una pregunta opcional sobre esta clase divulgativa que suma 0,2 puntos a la nota obtenida en dicha prueba.

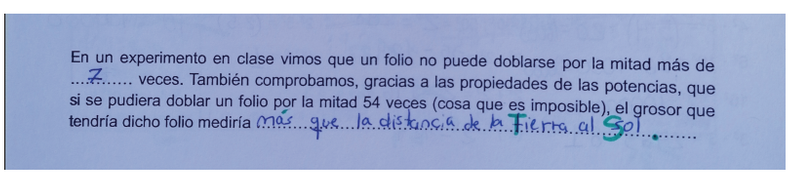

En un experimento en clase vimos que un folio no puede doblarse por la mitad más de ...7..... veces. También comprobamos, gracias a las propiedades de las potencias, que si se pudiera doblar un folio por la mitad 54 veces (cosa que es imposible), el grosor que tendría dicho folio mediría más que la distancia de la Tierra al Sol.

Figura 3: pregunta adicional en prueba escrita de 1.º ESO y respuesta de uno de los alumnos/as

Algunas observaciones antes de terminar:

Nótese que los conceptos aquí tratados no son difíciles para 1.º ESO (me refiero por ejemplo a que en 6.º de primaria ya se ve la definición de potencia (necesaria en la clase divulgativa 2), y antes, en 4.º, ya se opera con de-

cimales (necesario en la clase 2) y se conocen los números romanos (usado en la clase 1). Pero lo importante de estas sesiones no es el nivel en sí de lo tratado, sino el hecho de adquirir un poco de cultura matemática (¿quién es Gauss?) y de ver el uso de las matemáticas para calcular algo que nos parecía en principio increíble (¿de verdad que doblando por la mitad 54 veces un papel, el grosor de dicho papel llegará hasta el Sol?). Esto último es un claro ejemplo de que «las matemáticas doman la intuición», como dice el conocidísimo divulgador de matemáticas y profesor de la Universidad de La Rioja Eduardo Sáenz de Cabezón en muchas de sus ponencias.

Este tipo de clases hay que realizarlas un día que estén en clase todos los alumnos/as si es posible. Si no lo es, entonces las preguntas opcionales de las pruebas escritas no pueden proponerse (porque los alumnos/as que no estaban presentes ese día, estarían obviamente en desventaja).

En el título aparece «Parte I», porque me gustaría continuar publicando mi experiencia con el resto de las clases divulgativas llevadas a cabo este curso en boletines posteriores.

Recursos bibliográficos

Colera, J., I. Gaztelu y R. Colera (2016), *Matemáticas 1.º ESO*, Ed. Anaya.
Rufián, A. (2012), *Gauss, la teoría de los números: si los números pudieran hablar,* National Geographic (edición especial).
Sáenz de Cabezón, E., *¿Cuántas veces puedes doblar una hoja de papel?*, <https://www.youtube.com/watch?v=nc5okMs_ss0>.

La estrella mudéjar: en 3.º de principio a fin

por

Arancha López Lacasta, Teresa Cepero Fustero y Daniel Sierra Ruiz

(CPI El Espartidero, Zaragoza)

Se podría decir que la idea inicial de esta experiencia que presentamos tiene su origen en Conexión Matemática. Originalmente uno de los objetivos del programa era establecer vínculos entre el profesorado. Tras el taller de rigor en el IES Salvador Victoria, en conversación con los compañeros, comentaron que estaban buscando una forma de generar una estrella mudéjar a partir de varias copias de dos o tres figuras geométricas sencillas. Además, idealmente se tendría que poder hacer *algo más* con estas piezas, como por ejemplo cuadrar la estrella.

Posteriormente, dándole vueltas en casa, observamos que la estrella mudéjar se puede generar a partir del cuadrado y del triángulo rectángulo que se ven en la figura 1. En este enlace se puede ver un vídeo (de mala calidad) del proceso para llegar a la estrella partiendo de un cuadrado.

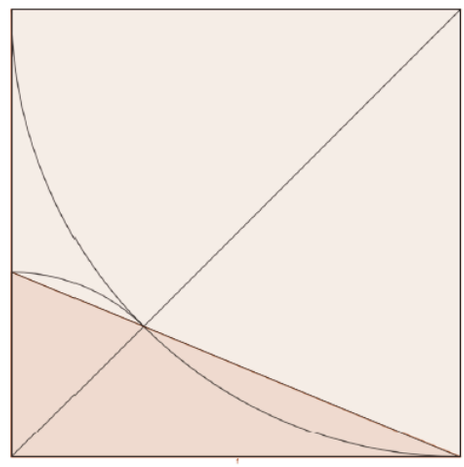


Figura 1. El cuadrado del que partimos, y la forma de obtener el triángulo rectángulo

El hecho de que la medida del cateto pequeño del triángulo rectángulo sea $\sqrt{2}-1$, nos puso en la pista de que quizás pudiéramos utilizar esta construcción para trabajar los números irracionales haciendo uso de su expresión radical.

Como bien es sabido, el curso 20-21 se presentaba con unas cuantas dificultades y muchas incertidumbres. Todos los docentes nos encontramos con el problema de que el alumnado empezaba el curso sin haber trabajado una buena parte del currículo del anterior curso. Por su parte, el Departamento de Educación planteaba en su plan de refuerzo que los contenidos del curso entrante no podían ser una mera suma de los no impartidos en el curso anterior y de los que habían de impartirse en él. Así pues el reto era importante y nosotros realizamos un esfuerzo para darles coherencia eliminando los elementos redundantes.

En ese contexto, en el CPI El Espartidero, los docentes implicados en impartir 3.º académicas en el curso 20-21, decidimos comenzar de forma diferente.

No utilizamos libro de texto, y quisimos *enlazar* los contenidos de 3.º con lo trabajado en 2.º, a partir de algo muy de Aragón, como es la *estrella mudéjar* (figura 2).

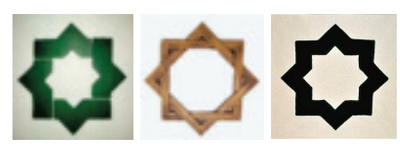


Figura 2

Planteamos el trabajo como unidad inicial del curso y como hilo conductor del temario.

En la unidad inicial pretendimos:

— Repasar contenidos de 2.º que se fueran a ampliar en 3.º. Esta fue la selección:
  - Geometría plana. Perímetros y áreas. Teorema de Pitágoras.
  - Proporcionalidad numérica y geométrica. Escala.
  - Semejanza de figuras. Teorema de Thales.
  - Redondeo de números. Números irracionales.
  - Movimientos en el plano.
  - Álgebra.

— Ofrecer contenidos nuevos.

— Encadenar actividades, que no fueran cosas aisladas, que el producto final fuera cúmulo de todas (hacerles ver que las matemáticas no son bloques estancos).

Teniendo clara esta parte, planteamos diferentes tareas enlazadas entre sí, con los contenidos a repasar y a ampliar, intentando combinar el trabajo manipulativo con el escrito, y el trabajo individual con el trabajo en grupo (gran o pequeño grupo), con una duración de 20 sesiones (por la semipresencialidad con la que comenzamos el curso 20-21), concluyendo con prueba objetiva (tabla 1)

Apartados	*Contenidos a trabajar*
0 Un poquito de historia	
1 El puzzle 2 Optimizando papel	Semejanza de figuras.
3 Construcciones diferentes del triángulo rectángulo necesario, ¿misma área? 4 ¿Sobra el mismo trozo de papel?	Geometría plana. Áreas.
5 A hacer el puzzle. Estrella mudéjar	Geometría plana. Perímetros y áreas. Semejanza. Redondeo.
6 Tarea de precisión. Cálculo de los lados del triángulo.	Teorema de Pitágoras. Proporcionalidad directa. Números irracionales.
7 Movimientos en el plano. Construcción de la estrella.	Movimientos en el plano.
8 Generalizamos. Del 1 a la *x*.	Teorema de Pitágoras. Números irracionales.Cálculo de perímetros y área. Álgebra.

Tabla 1

Comenzamos la unidad con un poquito de historia, explicando qué era la estrella mudéjar, saber su importancia, símbolo de Teruel, muy presente en su artesanía, en sus construcciones, en la autovía…

A partir de la imagen de una estrella, les pedimos que *hicieran un puzzle* con figuras geométricas, lo más sencillas posibles.

Tras localizar el puzzle *más sencillo* (de cara al número de figuras geométricas distintas y lo más sencillas posibles) con 8 cuadrados iguales y 16 triángulos rectángulos iguales (figura 3), vimos la relación entre ambos y pasamos a hacer cada uno su estrella.

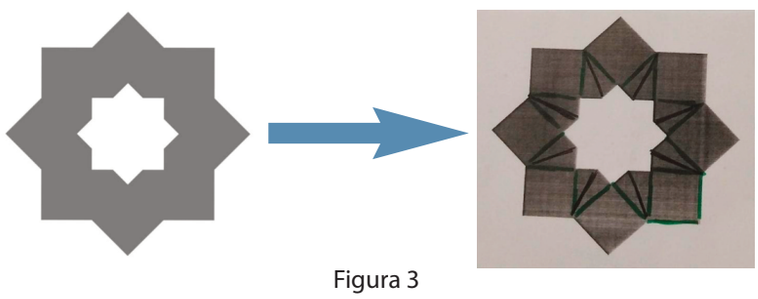
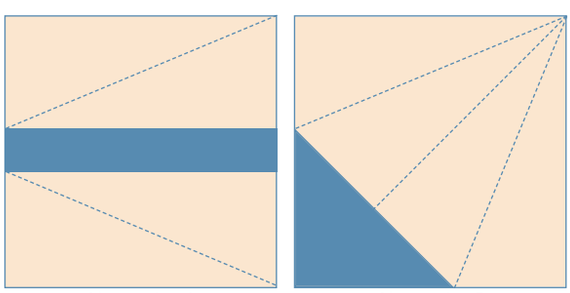


Figura 3

Necesitábamos generar los triángulos y cuadrados, necesitábamos hacer pliegues al papel y seleccionar tamaños. Planteamos que se optimizara el uso de papel, calculando el número total de folios necesarios según tamaño seleccionado de estrella. Esto dio juego para trabajar la proporcionalidad directa.

En clase los alumnos no tuvieron problema a la hora de confeccionar cuadrados, no fue así con el tema de los triángulos, vimos la relación entre ambos y que de un cuadrado podíamos obtener 4 triángulos rectángulos iguales.

Llegados a este punto, un grupo se dio cuenta de que se podían plantear dos alternativas (figura 4).

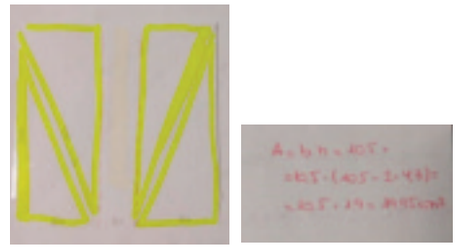


Alternativa A Alternativa B

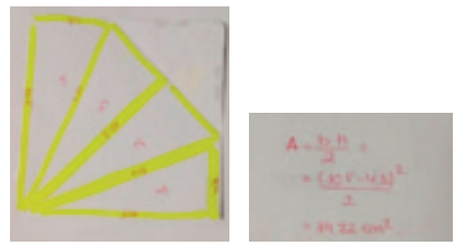
Figura 4

Este hecho dio juego para:

— Poder recuperar conceptos de geometría plana, se les solicitó comprobar que sobraba la misma cantidad de papel en ambas construcciones.
— No todos los alumnos tenían el mismo tamaño de papel, por lo que trabajamos la proporcionalidad geométrica, teorema de Thales aplicado a triángulos (figura 5).



Construcción 1



Construcción 2

Figura 5. Trabajo de un alumno

Con las piezas hechas, comparadas según la escala seleccionada, nos pusimos manos a la obra: cada uno a montar su estrella (figura 6).

Con la estrella hecha, planteamos el cálculo de perímetros y áreas totales, para ello se repasó el uso del teorema de Pitágoras, la aproximación de números y la proporcionalidad, comprobando de esta forma que las cuentas estaban bien hechas.

Para localizar las medidas, los alumnos trabajaron de manera manipulativa, localizamos en gran grupo un proceso de plegado que nos facilitaba los datos necesarios (figura 7).

Llegados a este punto, nos centramos en los números, les hicimos ver que las cuentas estaban bien hechas y, sin embargo, no todos teníamos los mismos resultados, había cierta imprecisión, por diferentes motivos. Por ejemplo:

— Al manipular el papel, los pliegues no son exactos, lo que nos llevó a repasar la aproximación de números decimales, con cifras muy pequeñas.
— Se planteó, también, los diferentes tamaños de las estrellas, se volvió sobre el concepto de constante de proporcionalidad longitudinal y de superficie, y planteamos hacer cálculos todos con la misma unidad, selecciona-

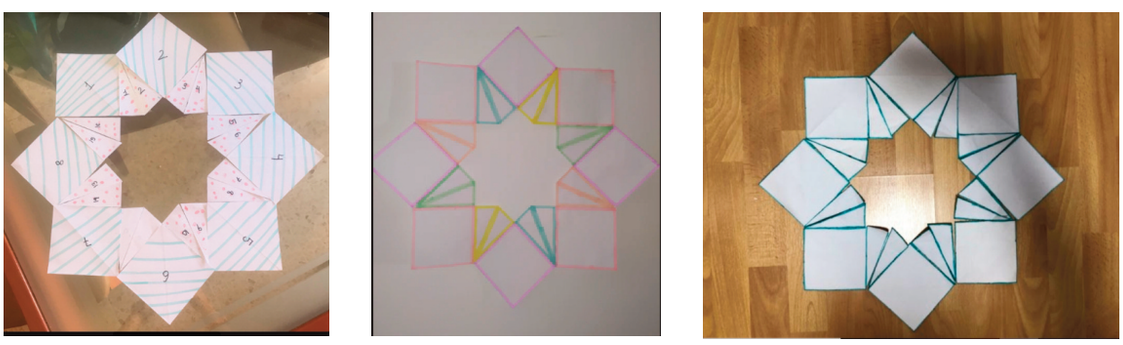


Figura 6. Algunos de los resultados de los alumnos

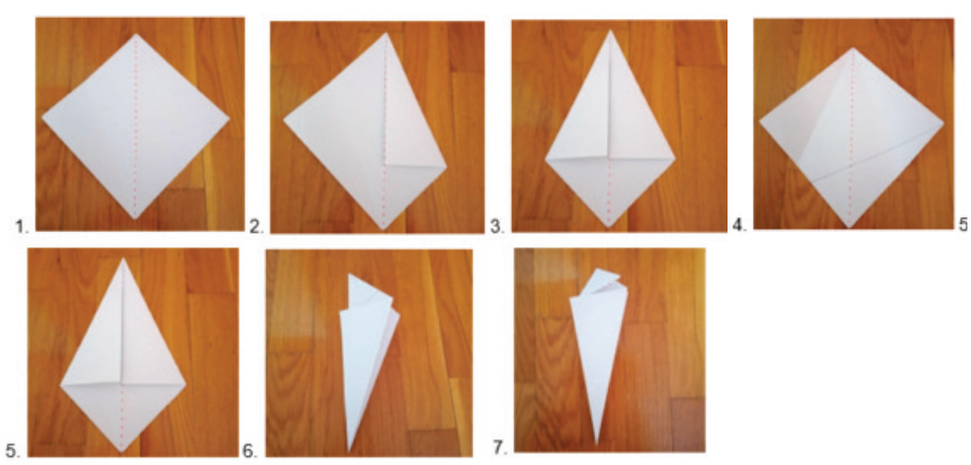


Figura 7. Proceso de plegado planteado por el grupo

mos 1 u como medida del lado del cuadrado y repetimos el proceso de cálculos. Seguían saliendo aproximaciones, lo que nos dio pie para introducir el concepto de números irracionales, concepto nuevo para 3.º de ESO.

Llegados a este punto, teniendo claro el proceso de construcción de la estrella a partir de dos figuras tan sencillas como un cuadrado y un triángulo rectángulo, introducimos el concepto de movimientos en el plano, nuevo del temario, y muy fácilmente de reconocer por parte de los alumnos, ya que habían manipulado y construido su propia estrella, pero sin dar nombres.

Para concluir con la unidad, quisimos *generalizar*, hacerles ver que había álgebra en todo este proceso. Habíamos comenzado con unas medidas concretas, cada alumno las que hubiera elegido según el corte del folio, para evitar imprecisiones habíamos pasado a tomar, todos, la misma unidad de medida, repitiendo el proceso aritmético. Ahora se plantea ver que esas cuentas tenían un orden, que se podían localizar expresiones algebraicas que nos permitieran agilizar el cálculo de perímetros y áreas. Se plantea tomar como unidad de medida x.

Se les entregó la tabla 2, con las cuentas hechas por ellos hasta el momento.

Cuadrado	*Diagonal del cuadrado*	*Cateto menor*	*Triángulo* *Cateto mayor*	*Hipotenusa*	*Perímetro de la estrella (interior + exterior)*	*Área de la estrella*
10,5 cm	14,8	4,3	10,5	11,3	236,8 cm	1243,2 cm^2
15 cm	21	6	15	16,1	336 cm	2520 cm^2
1 u						
2 u						
3 u						
4 u						
5 u						
x u						

Tabla 2

Para completarla, se planteó, en gran grupo, verbalizar los procesos llevados a cabo en cada paso y se les pidió que completaran la tabla por columnas, a fin de ver las relaciones existentes. El hecho de verbalizar un proceso matemático es algo que ayuda a organizar las ideas, y es algo que habitualmente pasamos por alto o no le dedicamos el tiempo necesario; no es fácil para ellos y es un proceso que deben hacer.

Con esta unidad, pudimos trabajar de forma conjunta muchos contenidos, a partir de «jugar con un trozo de papel». La idea era que se dieran cuenta de que no son bloques aislados, no es geometría, estadística, aritmética…, todo está enlazado. Y eso hicimos, enlazar y poder generar un hilo conductor para el curso.

Tras estas 20 sesiones de trabajo semipresencial y una prueba objetiva, comenzamos las unidades de 3.º de ESO Académicas, empezando o terminando cada una de ellas con aspectos relativos a la estrella mudéjar. En diferentes unidades además se les pidió que fueran ellos los encargados de *enlazar* la estrella con lo trabajado en el aula, con invención de problemas.

Así mismo, durante nuestra semana matemática, planteamos una pequeña exposición con las estrellas mudéjares confeccionadas por nuestros alumnos (figura 8).

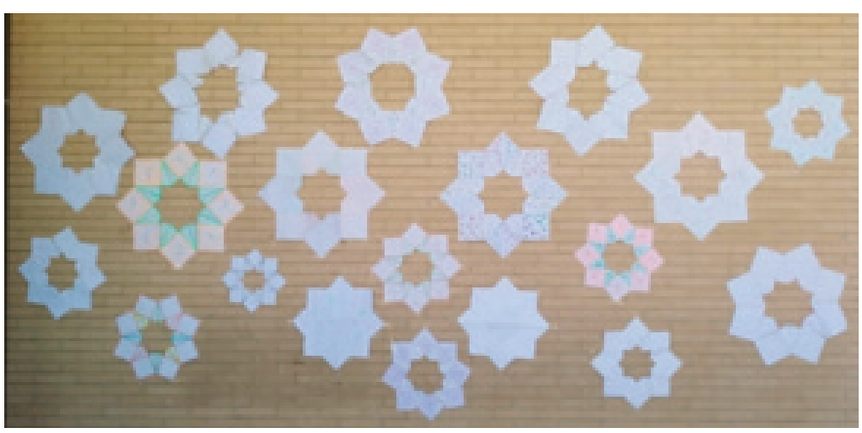


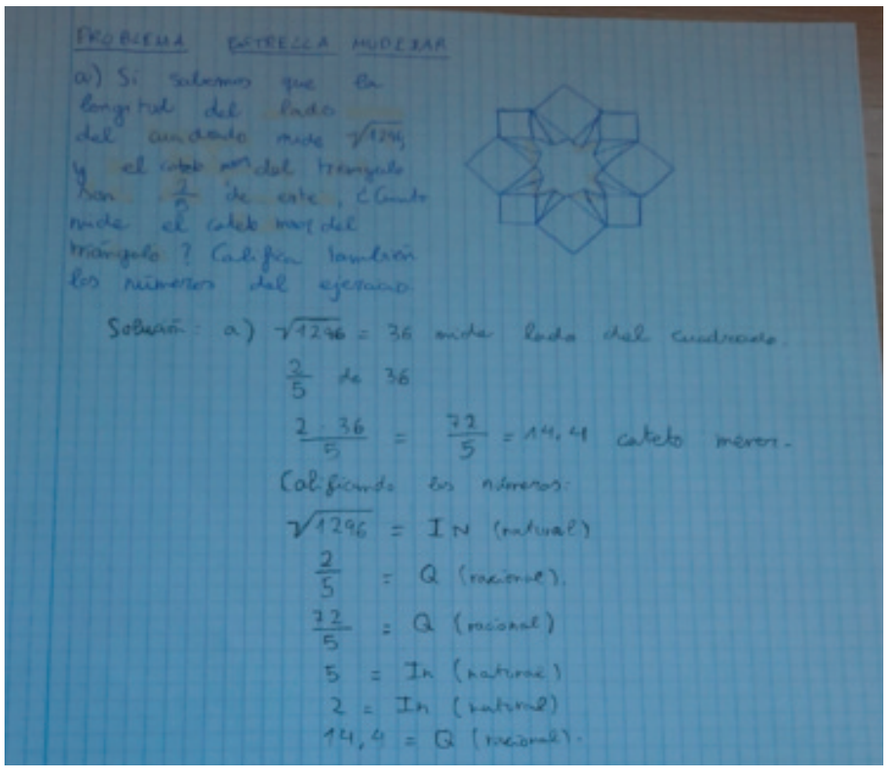
Figura 8

Para algunos alumnos, la estrella mudéjar supuso un pequeño trauma, pero otros la disfrutaron; disfrutaron el hecho de descubrir matemáticas en cosas que nos rodean, de poder manipular, algo que poco a poco vamos perdiendo conforme superan curso, y no deberíamos perder.

En la última clase del curso, un alumno preguntó si se iba a seguir con la estrella en 4.º de ESO, con cierto temor a escuchar un sí por respuesta. Le indicamos que seguramente cambiaríamos, pensando en poder hacer uso de la pajarita de Huesca, pero, sin dar tiempo a pensar algo en serio, nos planteó el *lauburu* vasco como punto de partida de 4.º académicas. Huelga decir que esa ha sido la unidad inicial de 4.º de ESO Matemáticas Académicas.

Ejemplos de ejercicios inventados por los propios alumnos

Conjuntos de números



PROBLEMA ESTRELLA MUDEJAR

a) Si sabemos que la longitud del lado del cuadrado mide $\sqrt{1296}$, y el cateto menor del triángulo son $\frac{2}{5}$ de este, ¿Cuánto mide el cateto mayor del triángulo? Califica también los números del ejercicio.

Solución: a) $\sqrt{1296} = 36$ mide lado del cuadrado.

$\frac{2}{5}$ de 36

$\frac{2 \cdot 36}{5} = \frac{72}{5} = 14,4$ cateto menor.

Calificando los números:

$\sqrt{1296}$ = I N (natural)

$\frac{2}{5}$ = Q (racional).

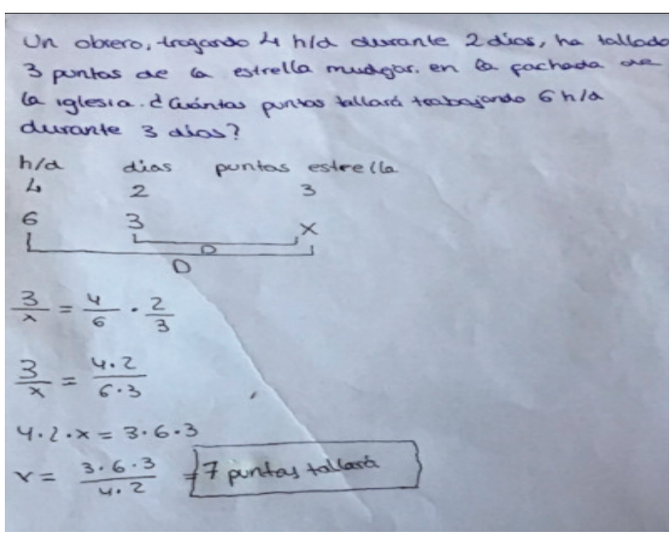
$\frac{72}{5}$ = Q (racional)

5 = In (natural)

2 = In (natural)

14,4 = Q (racional).

Proporcionalidad compuesta



Un obrero, trabajando 4 h/d durante 2 días, ha tallado 3 puntas de la estrella mudejar en la fachada de la iglesia. ¿Cuántas puntas tallará trabajando 6 h/d durante 3 días?

h/d	días	puntas estrella
4	2	3
6	3	x

D

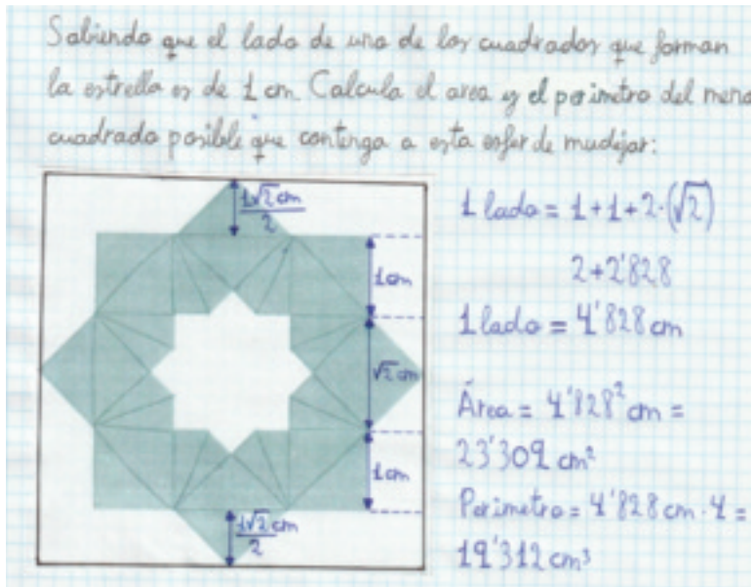
$\frac{3}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{3}{x} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 3}$

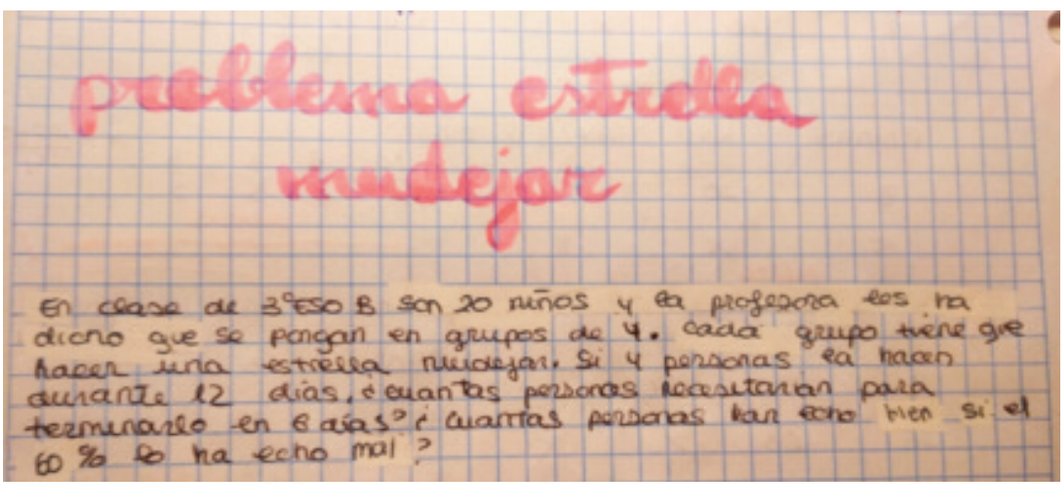
$4 \cdot 2 \cdot x = 3 \cdot 6 \cdot 3$

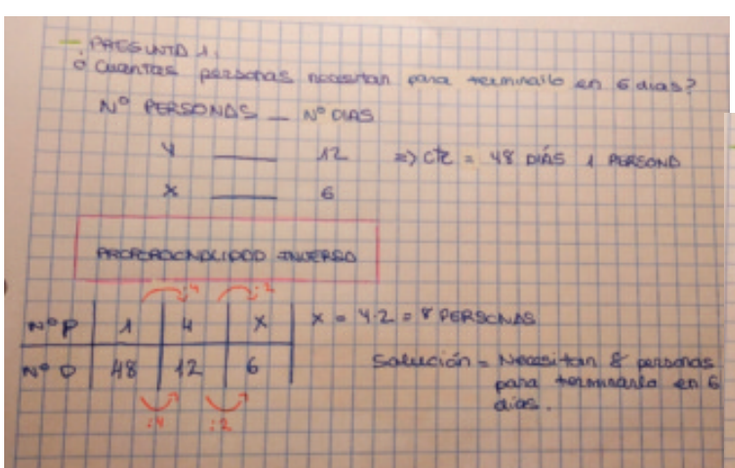
$x = \frac{3 \cdot 6 \cdot 3}{4 \cdot 2} = 7$ puntas tallará

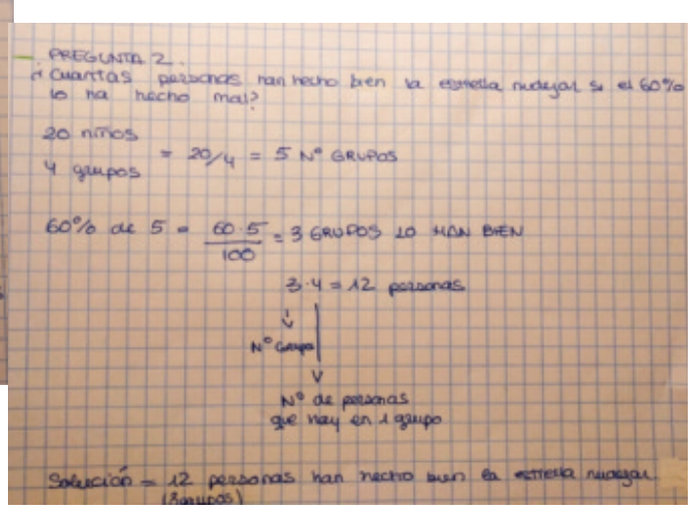
Radicales y aproximaciones



Proporcionalidad inversa y porcentajes

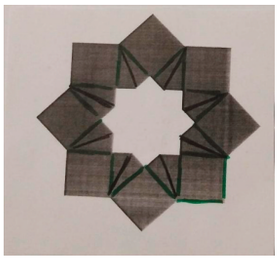






Ejemplos de preguntas que se pusieron en pruebas objetivas

Lenguaje algebraico. Polinomios



Hemos comenzado el curso construyendo una estrella mudéjar, formada por 8 cuadrados y 16 triángulos rectángulos.

Conociendo que

— el lado del cuadrado mide a
— el cateto menor del triángulo rectángulo mide b
— el cateto mayor del triángulo rectángulo mide c

Indica:

Enunciado	*Expresión algebraica reducida*
La expresión algebraica que indica el perímetro exterior de la estrella	
La expresión algebraica que indica la medida de la diagonal del cuadrado	
La expresión algebraica que indica el área de la estrella	

Repartos inversamente proporcionales

Hay un concurso de construcción de estrellas mudéjares, siguiendo unas pautas dadas. El premio son 852 euros y se ha repartido de manera inversamente proporcional al número de fallos detectados en las estrellas presentadas. El primer clasificado ha tenido 3 fallos, el segundo clasificado 5 fallos y el tercer clasificado 7 fallos. ¿Cuál es el premio de cada uno?

Sucesiones

En un taller artesano van a hacer estrellas mudéjares. Plantean hacer 50 estrellas, con la característica que cada estrella tendrá tres centímetros más de longitud que el lado del cuadrado.

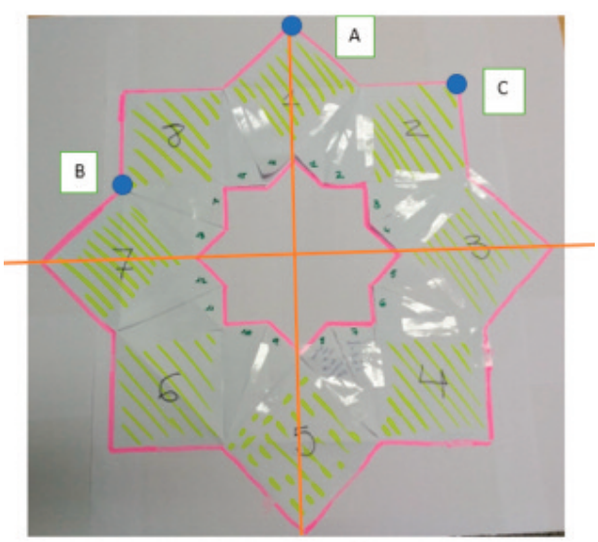
Si el cuadrado inicial mide 5 cm de lado

a) Indica las medidas de los siguientes 10 cuadrados.
b) ¿Cuánto medirá el cuadrado último?
c) Indica qué tipo de progresión tienes, justificando tu respuesta.

Racionales, uso de calculadora y funciones

En la imagen puedes ver la estrella mudéjar insertada en unos ejes coordenados.

Si las coordenadas de los puntos son:



•$A(0,\sqrt{2}+1)$
•$B(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$
•$C(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

Aproxima a las centésimas y calcula:

a) Dibuja la recta que pasa por los puntos B y C. Indica el signo de la pendiente de dicha recta, justificando tu respuesta.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y C

Habilidades lógicas: decantación y clasificación

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

El desarrollo del razonamiento en edades tempranas es, junto con la resolución de problemas, la representación de conocimientos por diversos métodos y la comunicación de los mismos, uno de los pilares sobre los que se sustentará el edificio de los conocimientos matemáticos que los niños deberán ir construyendo a lo largo de su paso por los sistemas educativos.

La importancia de estos pilares queda plasmada en los estándares para la educación matemática del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000), así como en las competencias matemáticas en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la OCDE, como señala Alsina (2014).

Sin embargo, la capacidad de pensamiento lógico de los niños de Educación Infantil es reducida, ya que por su edad, su pensamiento es egocentrista, y la capacidad para cuestionarse las propias acciones es muy reducida. Estas limitaciones desaparecen conforme los niños mejoran el dominio de las habilidades lógicas. Debemos provocar el desarrollo de las mismas en el aula, ya que espontáneamente, sin nuestra intervención, se convertirá en un proceso lento y tardío. Por ello es especialmente importante que las habilidades lógicas se trabajen en el aula de Educación infantil.

Esta necesidad encuentra respuesta en el currículo de la etapa. En concreto, en el área de Conocimiento del Entorno, en el Bloque 1: Medio físico: elementos, relaciones y medida, que establece para el 2.º ciclo de Educación Infantil, la Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, (BOE 05/01/08), encontramos dos contenidos que hacen una clara referencia a lo que estamos tratando:

— 2. Percepción de semejanzas y diferencias entre los objetos. Discriminación de algunos atributos de objetos y materias. Interés por la clasificación de elementos. Relaciones de pertenencia y no pertenencia.
— 3. Identificación de cualidades y sus grados. Ordenación gradual de elementos. Uso contextualizado de los primeros números ordinales.

Los contenidos tratados para promover en los niños el desarrollo de la lógica girarán en torno al trabajo sobre las cualidades y atributos de los objetos. Se tendrá en cuenta tanto el reconocimiento de dichas cualidades como el descubrimiento de relaciones entre ellas, dando lugar a la formación de colecciones mediante criterios basados en las mencionadas cualidades.

Estos contenidos permiten un camino progresivo desde los conceptos relativos a las habilidades lógicas, centrados en las cualidades, hacia la cuantificación de las colecciones y la introducción de los números con significado de cardinales y ordinales.

Entre los objetivos de esta misma orden, también encontramos el siguiente:

— 5. Representar atributos de elementos y colecciones, y establecer relaciones de agrupamientos, clasificación, orden y cuantificación, iniciándose en las habilidades matemáticas.

O sea, se consideran las habilidades lógicas como precursoras del conocimiento matemático. Por todo ello, hemos decidido abordar este tema.

En esta ocasión, del conjunto de habilidades lógicas que se pueden trabajar, nos centraremos en las actividades que se desarrollan en torno al agrupamiento de las piezas de una colección según los atributos que presentan en una o varias cualidades.

En primer lugar plantearemos actividades en las que la atención del alumnado se centre en una (o varias) cualidades sensoriales de la colección de objetos, para discernir si estos poseen el atributo indicado o no. Se trata de actividades de decantación. En ellas el alumnado debe seleccionar, entre una colección de objetos, aquellos que posean una determinada característica o atributo. Ello implica que todas las piezas que no lo poseen, quedan sin agrupar, indiferenciadas en el mismo «montón». Este tipo de actividades exigen que los niños se concentren en una cualidad de los objetos, por lo que se está trabajando todo lo relativo a la identificación y el reconocimiento de las cualidades. Incluso podemos ir más allá trabajando con varias cualidades, ya que la decantación puede plantearse también atendiendo a dos o más cualidades sensoriales.

Para desarrollar las relaciones entre dichas cualidades sensoriales, podemos recurrir a las clasificaciones. La clasificación es un instrumento de conocimiento porque obliga a analizar las propiedades de los objetos y, por tanto, a ampliar su conocimiento relacionándolos con otros semejantes estableciendo así, sus parecidos o sus diferencias (Chamorro, 2005). Pero también va a permitir que el niño organice mentalmente el mundo que le rodea, puesto que las colecciones de objetos pueden provenir de su entorno inmediato.

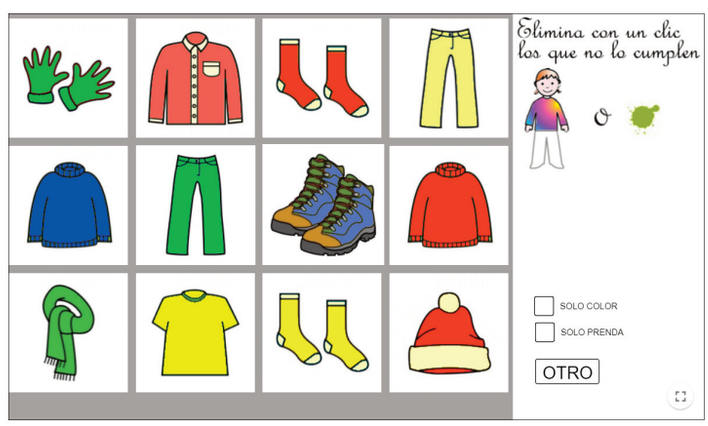
Clasificar una colección implica agrupar todos los objetos de la misma en grupos o clases disjuntas. Es decir, a diferencia de lo que ocurría en la decantación, todos los objetos de una misma clase poseen el mismo atributo de una cualidad, y un objeto no puede estar a la vez en dos clases distintas.

Las clasificaciones también pueden plantearse en base a dos cualidades distintas. Son las llamadas clasificaciones cruzadas o múltiples. Frecuentemente se representan mediante tablas de doble entrada, de modo que en la primera columna aparecen los atributos de una de las cualidades y en la primera fila los de la otra. Obviamente, la complejidad aumenta.

A continuación presentamos una pequeña colección de actividades de decantación y de clasificación para trabajar en esta primera etapa educativa, recogidas en el libro GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/trnajfpm>.

Decantaciones

Quién es quién



Esta aplicación consta de una rejilla con doce casillas en las que aparecen diferentes artículos de vestir, que se pueden considerar desde dos puntos de vista: la parte del cuerpo (arriba o abajo) en que se ponen (criterio representado en la escena por la figura de un niño) y el color, que puede ser verde, rojo, amarillo y azul.

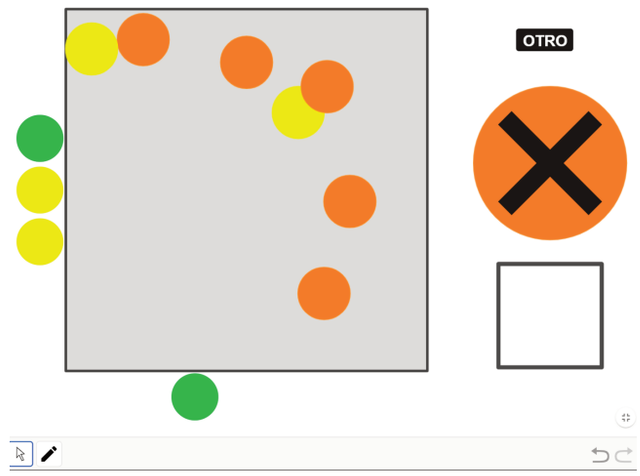
La actividad consiste en que el niño debe ir eliminando del tablero aquellas imágenes que no cumplen el criterio que se indica en la escena. Basta con hacer clic sobre una imagen para que esta desaparezca. Mediante unas casillas de verificación, podemos seleccionar si trabajamos con un solo criterio (la parte del cuerpo o el color) o con ambos a la vez, lo que dificulta la resolución. Para comenzar de nuevo el juego, basta con pinchar en otro.

En el aula podemos darle varios enfoques, en función de la intención del docente, siempre pensando en el uso de la pizarra digital interactiva. Una posibilidad es que un niño salga a resolver el tablero mientras el docente plantea cuestiones para fomentar la participación de los demás. Otra posibilidad es que se oculten los dos criterios (clicando ambas casillas de verificación) y la maestra deje a la vista una selección de imágenes, siendo los niños los que descubran el criterio utilizado.

Otra forma de enfocarlo sería imprimir un juego de fichas. Entre todos eligen una ficha y el niño que está en la PDI hace preguntas, eliminando aquellas fichas de la pantalla que no cumplen los criterios, hasta adivinar la ficha.

Selecciona colores

La aplicación muestra un cuadrado gris que tras hacer clic en el botón INICIAR se llena de círculos de varios colores en movimiento. Simultáneamente, aparece a la derecha un círculo de color que puede llevar en su interior un aspa, en cuyo caso significa que lo que se busca son los círculos que no tienen ese color. Por tanto, la propuesta es ir seleccionando aquellos círculos del cuadrado interior que satisfacen la propiedad indicada. Cada vez que se seleccione uno que la cumpla, saldrá fuera del cuadro, colocándose a la izquierda o debajo del cuadrado, lo que permitirá, una vez seleccionados todos realizar un recuento de los mismos, y anotar el número en el pequeño recuadro que aparece en la parte inferior derecha.



Los círculos quedarán divididos en dos grupos, los que cumplan la condición y los que no, que estarán dentro o fuera del cuadrado según cómo sea dicha condición, si positiva o excluyente. Establecer la cardinalidad de los dos conjuntos permitirá obtener descomposiciones del número 11, total de círculos en movimiento.

Rote Brucke – Decantación

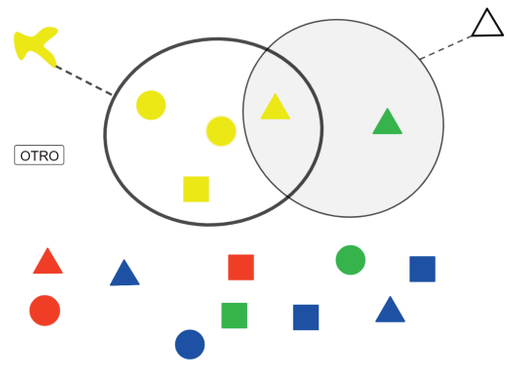
Se trata de una actividad que se apoya en el cuadro *Rote Brucke* del pintor suizo Paul Klee, que utiliza figuras geométricas para componer un paisaje. Con ella se puede realizar una actividad de decantación con una o dos cualidades de las figuras: color y forma. Los atributos de ambas aparecen a la derecha de la imagen y, mediante unos deslizadores se elige cuál de ellos se quiere trabajar. Una vez elegido, los alumnos deberán arrastrar a la parte de la derecha todas las figuras que cumplan el criterio de forma y color.

Haciendo uso de este mismo cuadro, se pueden trabajar también las clasificaciones con otra aplicación, comentada en el artículo «Con mucho arte» del número 39 de *Entorno Abierto*.

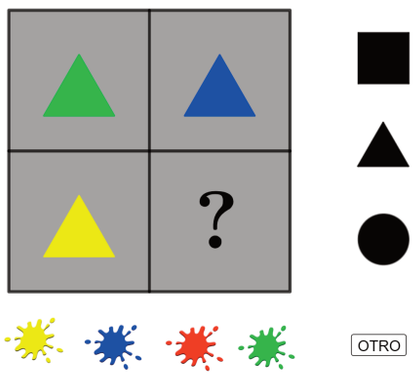
Diagrama de Venn

En esta ocasión el escenario que se muestra plantea la ubicación de algunos de los objetos colocados en la parte inferior, dentro de los conjuntos, de manera que se cumpla el criterio que aparece en cada uno: el color, en uno y la forma en el otro. La zona de intersección deberá contener aquellos objetos que cumplan los dos atributos. Esta introducción de la intersección abre la puerta a la comprensión de que los objetos pueden pertenecer a clases diferentes, en función del criterio que se plantee.

Con esta aplicación se puede trabajar tanto la decantación por una cualidad como por dos.



¿Qué pondrías?

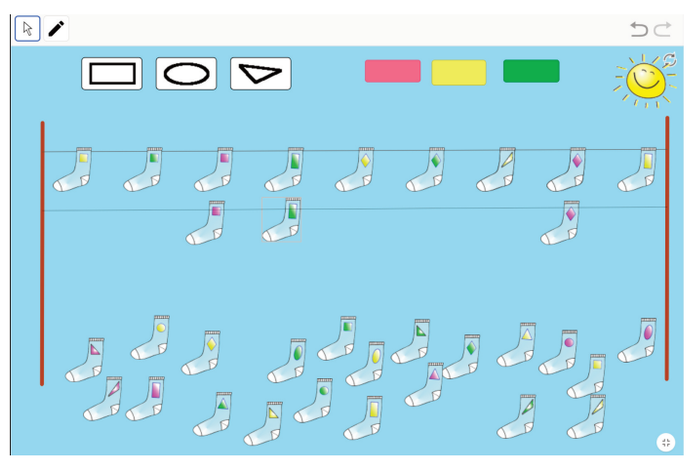


Con un estilo visual similar a las actividades WODB (Which One Doesn't Belong?) se plantea este material en el que se debe elegir qué forma y color colocar en la casilla inferior derecha en la que aparece una interrogación. La elección del objeto y el color no es única lo que fomenta el debate con la argumentación de la elección. Por ejemplo, en la imagen que acompaña este texto unos podrían decir triángulo (con selección de un color, o no), atendiendo al criterio forma, mientras que otros podrían elegir cualquier forma pero de color rojo, siendo en este caso la cualidad color. Ambas situaciones son igualmente válidas pues responden a criterios claramente establecidos.

La colada

Esta actividad se encuentra entre la decantación y el emparejamiento.

En la escena aparece un tendedero de ropa con unos cuantos calcetines tendidos y otros por el suelo. Todos tienen en el tobillo el dibujo de una forma geométrica (curva cerrada, triángulo o cuadrilátero) de un color (rosa, verde o amarillo). La actividad consiste en buscar en el suelo los que son iguales a los tendidos, y colocarlos en la cuerda.



Hay que señalar que, a su vez, las formas geométricas incluyen varias subclases. Hay triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Los cuadriláteros son cuadrados, rectángulos o rombos, y entre las figuras curvas aparecen círculos y óvalos.

Según el nivel del alumnado con el que se esté trabajando, se pueden obviar estas subclases. Con los más pequeños podemos jugar solamente con los colores, mientras que alumnos un poco más mayores pueden trabajar con las formas curvas y los cuadriláteros. Reservaremos para el alumnado de Educación Primaria la clasificación de los triángulos por la diferencia en sus ángulos o el reconocimiento del criterio aleatorio que une a los calcetines «tendidos» pulsando el sol ya que el sol funciona como otro botón, que al ser presionado elige aleatoriamente un criterio para mostrar calcetines.

La actividad cuenta con la herramienta de lápiz para que se puedan hacer recuentos y anotaciones de forma libre. Una vez completada la actividad, es el profesor el que indica si está correctamente resuelta o hay algún error, integrando este análisis en el desarrollo de la clase, dando participación en el mismo al alumnado, según su forma de llevar la clase. Para renovar el tendido de calcetines, basta con pinchar en uno de los botones o en el sol.

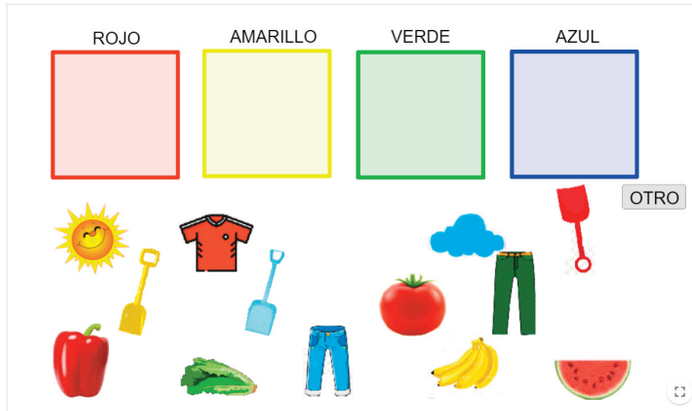
Clasificaciones

Clasifica por colores

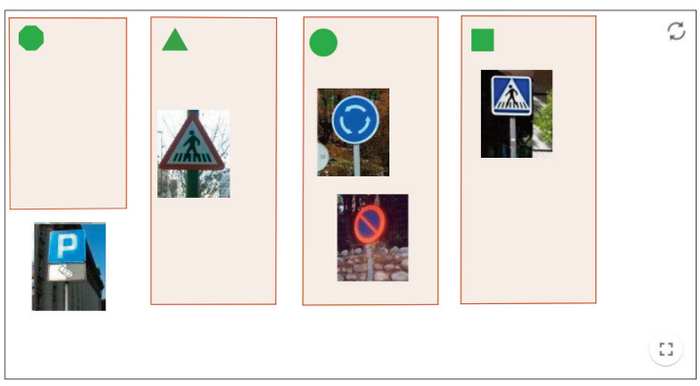
En esta ocasión se propone una clasificación de objetos por una cualidad: el color. Los alumnos deberán arrastrar las imágenes de los objetos al cuadrado que sea de su mismo color. Hay cuatro atributos: rojo, azul, verde y amarillo. Los objetos representados pertenecen al entorno próximo del niño, lo que quita abstracción a la actividad.

Una vez terminada la clasificación, el docente puede establecer un debate en el aula, planteando un recuento en cada subconjunto y cuestiones como de qué color hay más objetos, de qué color hay menos, etc.

Cada vez que reiniciamos la aplicación, los objetos cambian de lugar aleatoriamente.



Clasifica las señales

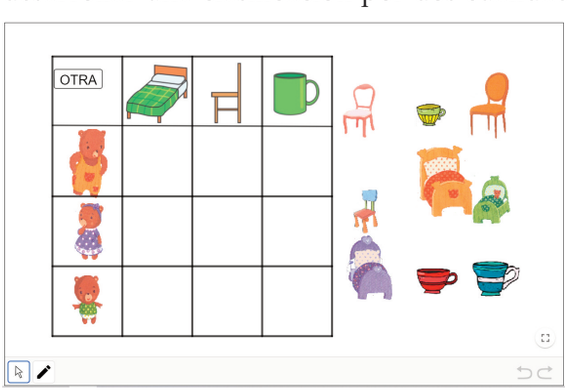


En esta actividad, al igual que en la anterior, se propone una clasificación por un criterio a partir de objetos de la vida real (en este caso, fotografías de señales de tráfico). Sin embargo, no trabajaremos con colores sino con formas geométricas básicas, lo que implica un nivel de abstracción algo mayor. La actividad consiste en llevar las señales de tráfico que van apareciendo a las «cajas» correspondientes según su forma geométrica.

Hay dos señales que pueden resultar más confusas y dar lugar a un debate en el aula sobre la clase que les corresponde. Una es la de «Ceda el paso». Su dificultad estriba en que se trata de un triángulo invertido (con la base arriba) y esta posición inusual puede despistar al alumnado. Es interesante no trabajar siempre con los triángulos en la misma posición. La otra es la del aviso de paso de cebra. Esta señal, pese a ser cuadrada, contiene una figura de un triángulo, por lo que se podría aprovechar para discutir sobre la definición de los criterios de clasificación empleados.

A cada uno lo suyo

Esta actividad está basada en el cuento de *Ricitos de Oro*. En ella se presenta un cuadro de doble entrada que permite desarrollar una clasificación por dos cualidades a la vez: en la parte de la izquierda papá oso, mamá osa y osito nos indican la cualidad «tamaño», y en la parte superior la cama, la silla y la taza nos indican la cualidad «utilidad».

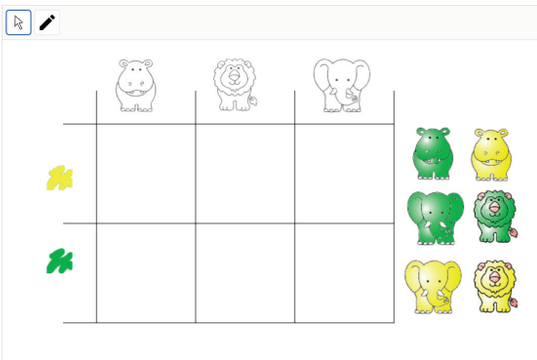


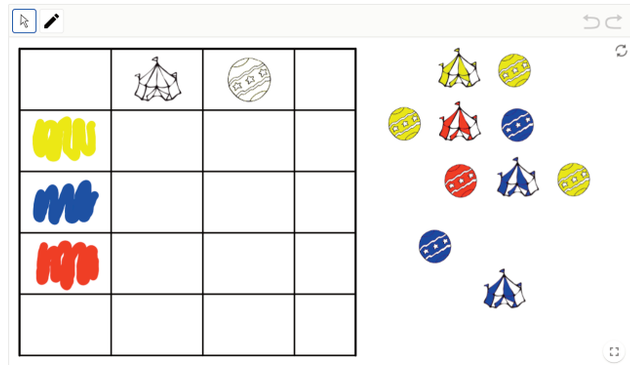
Los alumnos deberán arrastrar a sus casillas correspondientes los objetos que aparecen en la zona derecha de la pantalla, según los atributos que tomen de estas dos cualidades. Al reiniciar la actividad, los elementos a colocar aparecen en un orden aleatorio.

Esta actividad está diseñada para trabajar de forma integrada con el cuento *Ricitos de Oro*. Se pueden encontrar más materiales desarrollados con GeoGebra relacionados con él en el libro *Ricitos de Oro y las mates* en este enlace.

Animales por colores y Formas y colores en el circo

Estas dos actividades mantienen una estructura similar: En la pantalla aparece una tabla de doble entrada a la que los alumnos tendrán que arrastrar las imágenes situadas a la derecha de la pantalla (hipopótamo, león y elefante, en un caso, y carpas y pelotas, en el otro), a su lugar correspondiente, siguiendo los criterios de color (verde y amarillo, en el primer caso, amarillo, azul o rojo en el segundo) y tipo de animal u objeto.





Además, pinchando en el icono del LAPIZ, se puede anotar en la pizarra el resultado del recuento de los objetos atendiendo a un criterio (en el caso del circo se dispone de cuadros vacíos destinados a tal fin).

Al reiniciar la actividad los animales aparecen colocados en posiciones distintas y el número de carpas y pelotas, además, cambia.

Llena la nevera

La aplicación muestra una nevera en cuyo interior se deben colocar las frutas (izquierda) y verduras (derecha) que se encuentran en una cesta situada a su lado. Encima de la cesta aparece un cartel con el cardinal de elementos a colocar de cada tipo.

Cada vez que reiniciamos la actividad cambia el cardinal de las frutas y verduras así como el orden de aparición de las palabras. Para ellas, se puede seleccionar el idioma entre castellano, francés o inglés.

Aunque se trata de una actividad de clasificación por un solo criterio, la hemos colocado en último lugar, pues contiene elementos textuales y numéricos, que podrían permitir orientar esta actividad al primer curso de primaria.

Aunque el trabajo de decantaciones y clasificaciones con material manipulativo es ineludible, consideramos que actividades como las de esta colección pueden propiciar situaciones de aula en las que los alumnos expresen y compartan sus ideas y sus estrategias a la hora de resolver las situaciones. Esto supone una ocasión para valorar el estadio en que se encuentran respecto a su pensamiento lógico y facilita un seguimiento de la evolución de este en los diferentes niños que componen el aula.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2014),«Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave», *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*,Volumen 86, 5-28.

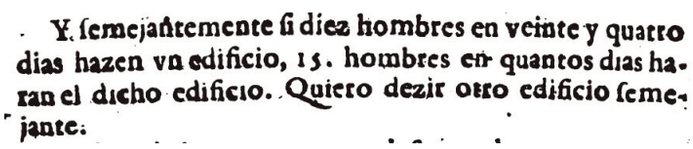
Chamorro , C. (2005), *Didáctica de las Matemáticas para educación Infantil,* Pearson Educación, Madrid.

Líneas trigonométricas desaparecidas

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

En estos momentos se está llevando a cabo un laborioso e importante proceso de renovación y diseño curricular en Aragón. Este proceso supone una revisión de aspectos metodológicos, organizativos, de evaluación, etc. También los contenidos incluidos están, o deberían estar, sujetos a una revisión. Sin embargo, en algunas ocasiones se tiene la sensación de que los contenidos que conforman las matemáticas escolares (o al menos muchos de ellos) son inmutables, y su presencia en el currículo, indiscutible.

Una mirada al pasado nos muestra que en demasiadas ocasiones esto es así y encontramos, por ejemplo, tipos de problemas que llevan apareciendo en los libros de texto durante siglos, sin que uno tenga demasiado claro el porqué.


Y. ſemejantemente ſi diez hombres en veinte y quatro dias hazen vn edificio, 15. hombres en quantos dias haran el dicho edificio. Quiero dezir otro edificio ſemejante.

Es poco probable que en 1643 (fecha de publicación del libro del que está extraído el problema de la imagen) el tiempo necesario para construir un edificio fuera inversamente proporcional al número de obreros. Hoy en día tampoco lo es, pero enunciados como este siguen apareciendo en nuestros libros de texto. ¿Acaso no hay otros contextos mejores en los que plantear problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad inversa?

Sin embargo, lo cierto es que las matemáticas evolucionan y su enseñanza también. Situaciones que en un momento histórico fueron cotidianas, resultan ajenas doscientos años después. Herramientas que en un tiempo parecieron indispensables, se convierten en obsoletas por múltiples razones. En esta nota vamos a comentar un ejemplo proveniente de la trigonometría.

La figura siguiente proviene de un pequeño ejemplar de 1948 titulado *Tablas Taquimétricas*, escrito por el ingeniero oscense Hermenegildo Gorría (1843-1920). El libro es de pequeño formato (17 × 11 cm) y contiene tablas de valores de líneas trigonométricas, así como indicaciones sobre el trazado de curvas de enlace entre rectas ya que, en palabras del autor:

> […] para la redacción de proyectos y la ejecución de obras de caminos, carreteras, acequias, canales y ferrocarriles, se estudia primero el trazado poligonal; después se unen cada dos rectas o alineaciones de ese trazado, por medio de curvas tangentes a las mismas, para lo cual se usan arcos de círculo o de parábola […]

Así, se entiende que el pequeño tamaño del libro está motivado por la posibilidad de utilizarlo como un breviario durante el trabajo de campo de un ingeniero.

En cualquier caso, la obra comienza con un breve recordatorio de los nombres de las líneas trigonométricas y su definición, tal y como vemos en la figura siguiente.

Preliminares

Líneas trigonométricas.—En trigonometría se llama *seno* de un arco o de su ángulo correspondiente, a la perpendicular trazada desde un extremo del arco al radio o diámetro que pasa por el otro extremo.

Se llama *tangente* trigonométrica a la parte de tangente geométrica trazada en un extremo del arco y comprendida entre dicho extremo y su encuentro con la prolongación del radio o diámetro que pasa por el otro extremo.

Se llaman *coseno* y *cotangente* de un arco o de su ángulo correspondiente, al seno y tangente del arco o ángulo complementario.

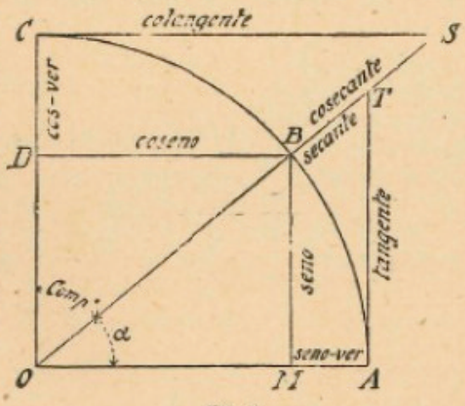


Fig. 1

En el ángulo AOB o arco correspondiente AB (fig. 1) las líneas trigonométricas ya definidas son: BM, el seno; AT, la tangente; $DB = OM$, el coseno, y CS la cotangente.

Además de estas cuatro líneas trigonométricas, que son las principales y las más generalmente usadas, se consideran también otras cuatro que a continuación se definen.

Secante de un arco o de su ángulo correspondiente es la recta trazada desde el vértice de éste hasta el extremo de la tangente, que en la figura 1 es OT.

Seno-verso es la parte de diámetro comprendida entre el pie del seno de un arco y el extremo del mismo arco, o sea el segmento AM.

Cosecante es la secante del complemento del arco, esto es, OS.

Coseno-verso es el seno-verso del complemento, o sea CD.

Este texto tiene dos elementos que pueden llamar la atención a un lector moderno:

— Las líneas trigonométricas no se definen como cocientes de lados de un triángulo rectángulo. De hecho, no se habla de razones trigonométricas.

— Aparecen dos términos que no se encuentran actualmente: seno-verso y coseno-verso.

El primer punto es muy interesante, aunque no le vamos a prestar especial atención. Quizás nos puede hacer reflexionar acerca de cuál es el verdadero origen de la trigonometría y sobre su utilidad práctica concreta. También podemos ver que el coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo se llaman así porque son, respectivamente, el seno, la tangente y la secante del ángulo complementario.

Pero nos vamos a centrar en el segundo punto. Se puede pensar que esos dos conceptos, el *seno verso* y el *coseno verso*, son elementos especializados, a los que solo prestaban atención determinados profesionales. Sin embargo, si se realiza una búsqueda no demasiado exhaustiva, es fácil constatar que no es así.

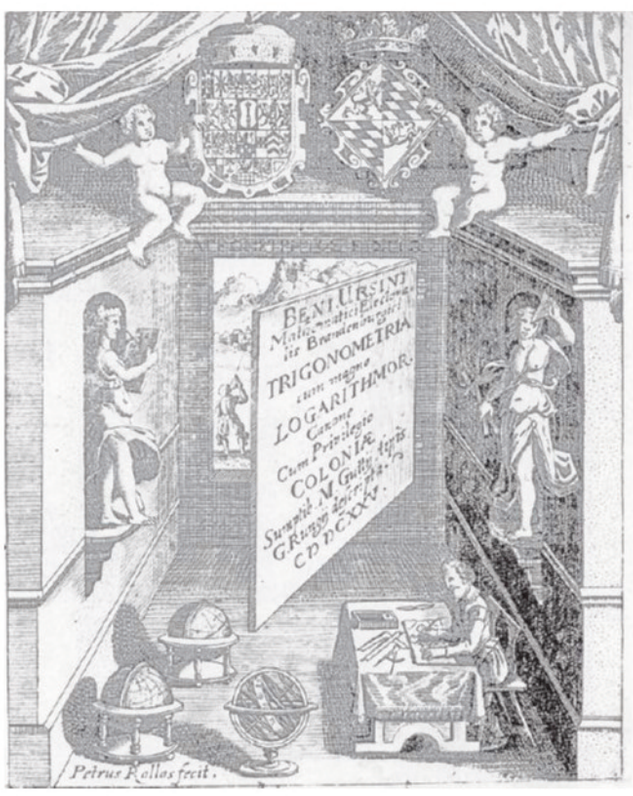
Líneas trigonométricas auxiliares.—Además de las cuatro líneas seno, tangente, secante y seno-verso, y cuatro colíneas coseno, cotangente, cosecante y coseno verso ya conocidas,

El fragmento anterior, por ejemplo, proviene de los *Ejercicios de Trigonometría* del capitán de fragata Antonio Terry y Rivas, publicados por primera vez en 1881. Esta obra se utilizó durante muchos años como obra de texto para ingresar en la Armada y se reeditó en 1914. Como podemos ver, el seno verso ocupa su lugar junto al seno, la tangente, la secante y sus cuatro correspondientes complementarias.

Los autores anteriores, de hecho, recogen una tradición muy anterior. Así, el fragmento siguiente es casi un siglo más antiguo que la obra de Terry. Proviene del *Compendio de la Geometría Elemental y Trigonometría Rectilinea para el Uso de los Cavalleros Guardias-Marinas*, publicado en 1794, y escrito también por un marino, Vicente Tofiño.

293. *Seno Verso ó Sagita, es la porcion del Diametro comprehendído entre el Seno primero de un Arco, y el mismo Arco*: y asi FC es Seno Verso del Arco CG; de donde se infiere, que si del Radio AC se resta FA, ó su igual GH, Seno segundo de dicho Arco, el residuo FC es el Seno Verso del Arco CC; pero el Seno Verso del Arco GBM, es igual á la suma del Radio MA con AF Seno segundo de dicho Arco.

Podemos retroceder más aún en el tiempo y salirnos del contexto español. Por ejemplo, en la *Trigonometria cum magnun logarithmor canone* de Benjamin Ursinus, impresa en Colonia en 1625 encontramos la misma definición: «el seno verso, que algunos dicen seno segundo, es el segmento del diámetro entre el seno recto y el arco».



Sinus Verſus qui alijs *Sinus Secundus* dicitur, eſt ſegmentum Diametri inter Sinum Rectum & arcum ejuſdem interceptum. Sunt & qui Sinum Verſum dicunt *Sagittam* vel *Sagittam-Sinus*, eodem ſcilicet reſpectu, quo duplum Sinus Recti vel ſubtenſam arcus Chordam, ſegmentumq; circumferentiæ Circuli, cui ea ſubtenditur, Arcum vocant.
Eſtq; Sinus Verſus vel minor vel major.
Sinus Verſus minor, eſt Sinus Arcûs Quadrante minoris vel Anguli Acuti.
Ita *BF* eſt Sinus Verſus Arcus *BC* Quadrante minoris vel Anguli Acuti *BAC*.

Así, acabamos de encontrar un objeto matemático, el seno verso, cuya importancia lo mantuvo presente en los textos dedicados a la enseñanza de la trigonometría durante muchos cientos de años pero que, finalmente, acabó por desaparecer sin dejar rastro.

Seguramente, llegados a este punto, el lector tiene claro que $versen\,\alpha = 1 - cos\,\alpha$ y le parece perfectamente natural que se haya prescindido de un objeto que puede definirse en términos de otro. Pero, en cualquier caso, esto suscita diversas cuestiones. Si la relación entre ambos es tan evidente:

— ¿Por qué se puso un nombre al seno verso?
— ¿Por qué mantener el coseno y prescindir del seno verso y no al contrario?

La primera pregunta se puede responder en parte si observamos que se cumple la siguiente relación:

$$sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{versen\,\alpha}{2}.$$

De este modo, si queremos construir tablas trigonométricas, la utilidad del seno verso resulta clara y es relativamente fácil entender que se le prestara atención.

La segunda pregunta resulta más difícil de responder. De hecho, podríamos preguntarnos el motivo por el cual el coseno recibe un nombre propio. A fin de cuentas, el coseno de un ángulo es el seno de su complementario. Es más, en la obra de Tofiño mencionada anteriormente el coseno es denominado seno segundo. Ursinus, por su parte, llama al coseno «sinus rectus complementi». El propio Gorría opta por introducir inicialmente el seno y la tangente, dejando el coseno en un plano secundario. Lo mismo hace Terry.

Así, incluso dejando de lado la presencia del seno verso y del coseno verso, parece que tenemos dos enfoques claramente diferentes. Antiguamente se introducían en primer lugar el seno, la tangente y la secante de un ángulo; de forma que el coseno, la cotangente y la cosecante eran los correspondientes conceptos del ángulo complementario. En la actualidad, se introducen el seno, el coseno y la tangente de un ángulo; de forma que la cosecante, la secante y la cotangente son los valores inversos de los anteriores.

Un posible motivo de este cambio puede radicar en una visión más aritmética y menos geométrica. La figura del libro de Gorría muestra una visión claramente geométrica. Se habla de líneas y cada una de las líneas trigonométricas consideradas se corresponde con un segmento. Hoy en día se habla de razones trigonométricas, que se obtienen mediante el cociente de longitudes y se conciben como números. Desde un punto de vista aritmético puede tener sentido hablar de «el inverso del seno», pero no desde un punto de vista geométrico.

Pero volvamos a lo que nos ocupaba: la desaparición del seno verso. Sean cuales sean las razones, se trata de un concepto ya abandonado, desaparecido y prácticamente olvidado. ¿Se le echa de menos? ¿Se puede hacer trigonometría sin él? ¿Se haría mejor con él? Cada uno puede responder a estas preguntas. Con independencia de las posibles respuestas, el seno verso es una herramienta matemática que se construyó y se utilizó con un fin. Los fines cambian. Las necesidades evolucionan. Algunas herramientas dejan de tener una razón de ser y herramientas nuevas deben ser inventadas para resolver problemas que no existían anteriormente. La enseñanza debe reflejar esta realidad en cierto modo.

Con esto no queremos decir que los objetos que se decida enseñar en clase de matemáticas deban estar seleccionados con criterios puramente utilitaristas. Pero quizás sí que podemos reflexionar sobre si algunos contenidos que consideramos irrenunciables lo son en realidad y, también, sobre cuáles son los motivos que nos llevan a considerar indispensables dichos contenidos.

Un problema de reparto inversamente proporcional en la XXIX Olimpiada aragonesa

por
Sergio Martínez-Juste
(Dirección General de Planificación y Equidad, y Universidad de Zaragoza)

En este artículo exploramos el problema 1, *La Gran Final* (ver figura 1), de la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO que se celebró en Zaragoza el 22 de mayo de 2021 en el aula magna de la Facultad de Ciencias. Estudiaremos la estructura del problema comentando su relación con los problemas escolares habituales. Además, resumiremos los datos obtenidos a partir de las respuestas de los 47 estudiantes que participaron en la fase final. En concreto, analizaremos las tasas de éxito y algunas estrategias, tanto erróneas como correctas, empleadas por los participantes.

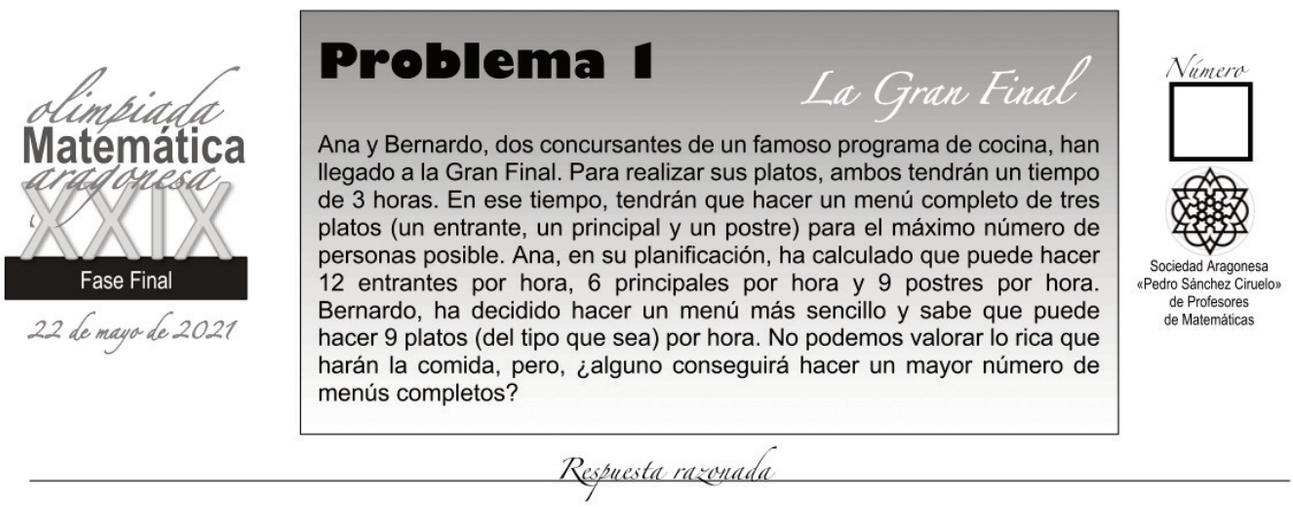


Figura 1. Problema 1, *La Gran Final*, de la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa

La estructura del problema

El problema 1 de la XXIX Olimpiada, *La Gran Final*, es un problema verbal, en apariencia sencillo, pero en el que, por ejemplo, podemos observar una amplia variedad de magnitudes diferentes: número de concursantes, número de platos diferentes que deben realizar, tiempo total disponible, velocidad a la que cada concursante hace cada tipo de plato, número de platos de cada tipo que cada concursante puede realizar…

En la pregunta se pide determinar si alguno de los concursantes podría ser capaz de realizar más menús completos que su oponente en el tiempo disponible. Es decir, se trata de que, con las condiciones de velocidad de realización de cada plato, los concursantes optimicen el tiempo para obtener el mayor número posible de menús completos.

Si nos fijamos en un único participante, tomemos como ejemplo a Ana porque la estructura numérica del problema es más compleja en sus condiciones iniciales, debemos repartir el tiempo total entre las diferentes tareas a realizar (hacer los entrantes, los principales y los postres). Sin embargo, el reparto no puede ser equitativo si queremos maximizar el número de menús completos. Para ello, podemos calcular cuánto tiempo debe dedicar a cada tarea para realizar menús completos, es decir, el mismo número de platos de cada tipo, de forma que el tiempo sobrante no sea suficiente para realizar un menú completo más. Si llamamos w_1, w_2 y w_3 a las velocidades a las que hace cada plato. La suma de las cantidades inversas (tiempo en horas que tarda en hacer cada plato), es decir,

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3},$$

nos proporcionaría el tiempo que se tardaría en hacer un menú. Si $T=3$ es el tiempo total disponible, entonces el cociente, k, entre el tiempo total disponible y el tiempo que nos cuesta hacer cada menú, nos informa del número de menús que se pueden realizar:

$$k=\frac{T}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}}.$$

Con los datos concretos de Ana, ese número de menús no es entero (redondeado a las décimas arroja un valor de 8,3). Es decir, Ana podrá hacer como máximo 8 menús completos. Para los datos de Bernardo, aunque no es necesario, el cálculo anterior arroja obviamente un valor de 9. Por tanto, Bernardo puede hacer un menú más que Ana.

La forma de escribir la cantidad k en la fórmula anterior no responde a una toma de posición de cómo deberían resolver o se espera que resuelvan los alumnos el problema. Todo lo contrario, se ha presentado de esa manera para resaltar la fórmula que habitualmente podemos encontrar en los libros de texto para la resolución de problemas (casi todos muy artificiales) de repartos inversamente proporcionales (Martínez-Juste y otros, 2019). Si nos fijamos solo en uno de los participantes, el problema anterior podría entenderse como un problema de reparto inversamente proporcional, donde entran en juego tres «participantes en el reparto» (cada tipo de plato) y debe repartirse el tiempo total de forma inversamente proporcional a la velocidad a la que se elabora cada uno de los platos. De hecho, la cantidad k anterior, número de menús, es la constante de proporcionalidad del problema ya que el producto del tiempo que tiene que estar en cada plato y la velocidad a la que los elabora debe ser igual para cada tipo de plato (e igual al número de menús completos que se elaboran).

Se pretende, por tanto, llamar la atención del profesorado que lea este artículo ejemplificando cómo puede proponerse un contexto realista del que surge sin necesidad de artificios el enunciado de un problema de reparto inversamente proporcional. Además, el significado de las operaciones entre las cantidades involucradas puede guiar a los estudiantes (como de hecho veremos que ha sucedido en muchos participantes de la olimpiada) para encontrar la solución sin necesidad de usar álgebra o fórmula alguna.

A diferencia de lo que ocurre habitualmente con los problemas escolares de repartos inversamente proporcionales, en el enunciado no se especifica que el reparto deba hacerse de forma inversamente proporcional. Además, el problema no se presenta de forma que se pida explícitamente repartir el tiempo entre los diferentes tipos de platos, sino que se deben comparar las constantes de proporcionalidad (número de menús completos) para cada participante. Es, por tanto, un ejemplo de cómo puede variarse la estructura de los problemas de proporcionalidad (simple directa o inversa, compuesta, repartos, porcentajes, escalas…) para no realizar únicamente problemas en los que se solicitan uno o varios datos, sino también otros en los que se solicita comparar la constante de proporcionalidad en diferentes situaciones.

Al margen de la clasificación que hemos hecho del problema con el estudio de su estructura y debido, en parte, a la sencillez de la estructura numérica en el caso de Bernardo (al ser iguales las velocidades el reparto inversamente proporcional se convierte en un reparto equitativo), el problema permite aplicar diferentes estrategias de resolución (por ejemplo, razonar que Ana no puede llegar a hacer 9 menús completos).

Una mirada global a los resultados

A pesar de la aparente simplicidad del problema que puede resolverse haciendo uso del significado de las cantidades que aparecen y de las operaciones que pueden realizarse entre ellas, la tasa de éxito fue del 55,3 % (26 respuestas correctas de un total de 47). En la tasa de éxito hemos contabilizado las respuestas que aun teniendo algún error aritmético hacen un planteamiento del problema adecuado.

Cabe destacar que ningún alumno dejó en blanco o sin entregar este problema. Todos los participantes de la fase final propusieron alguna respuesta, más o menos argumentada, al problema. Además, todas las soluciones tienen una alta componente aritmética. Los únicos literales utilizados aparecen en el planteamiento de reglas de tres o proporciones que los participantes utilizan generalmente para calcular los inversos de las velocidades de cada tipo de plato que hace Ana. No encontramos, por ejemplo, estrategias globales basadas en el planteamiento y resolución de ecuaciones. Por tanto, el problema parece promover razonamientos aritméticos.

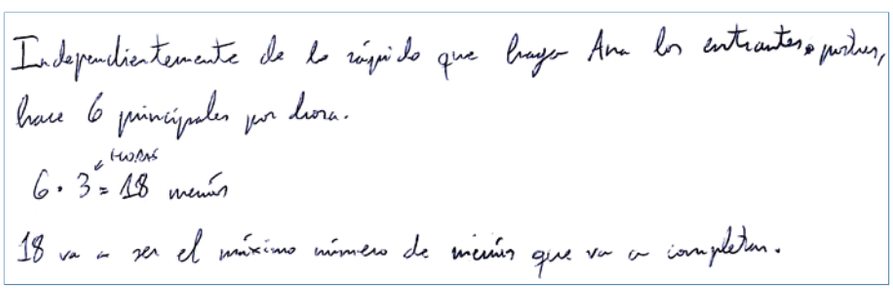
Principales fallos en el enfoque del problema

Como hemos dicho, los participantes presentaron resoluciones aritméticas, por lo que la mayor parte de los fallos parecen debidos a la realización de operaciones que no tienen sentido o a la inadecuada interpretación del resultado de estas. Algunos de ellos, como veremos, se basan en utilizar un modelo de reparto (Martínez-Juste y otros, 2019) equitativo en vez de proporcional

Presentamos los planteamientos erróneos más comunes detectados:

— Se da una solución, pero no se ha conseguido interpretar el razonamiento (2 producciones).

— Se da como solución que Ana puede hacer 18 menús y Bernardo 9. Se calcula cuántos platos de cada tipo podría hacer Ana en 3 horas y se toma como número de menús el mínimo de esas tres cantidades. Encontramos 9 producciones en esta categoría (figura 2).


Independientemente de lo rápido que haga Ana los entrantes y postres, hace 6 principales por hora.

6 · 3 (horas) = 18 menús

18 va a ser el máximo número de menús que va a completar.

Figura 2. Estudiante que responde que Ana puede hacer 18 menús

— Se da como solución que Ana puede hacer 6 menús y Bernardo 9. En estas producciones se realiza un reparto equitativo de tiempo y se da como respuesta para Ana el número de platos principales porque de dicho tipo es del que menos platos se pueden hacer en una hora. Encontramos 5 producciones (figura 3).

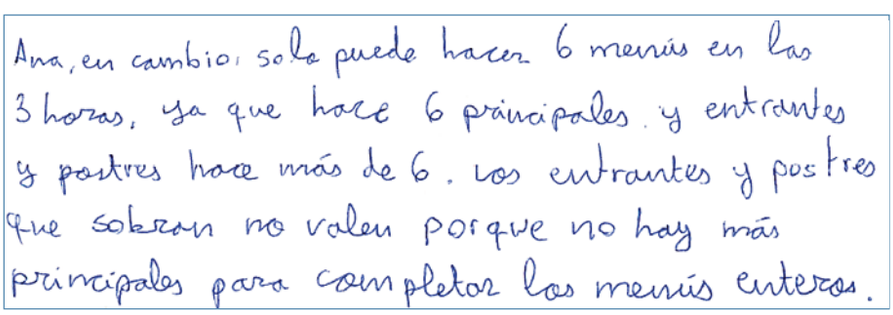

Ana, en cambio, solo puede hacer 6 menús en las 3 horas, ya que hace 6 principales y entrantes y postres hace más de 6. Los entrantes y postres que sobran no valen porque no hay más principales para completar los menús enteros.

Figura 3. Estudiante que responde que Ana puede hacer 6 menús

— Se da como solución que ambos concursantes pueden hacer 9 menús. En estas producciones se realiza también un reparto equitativo, pero tras esto se calculan cuántos platos (independientemente del tipo) puede hacer Ana, luego se hacen grupos de 3 para determinar (de forma errónea) cuántos menús completos puede hacer cada uno. Encontramos otras 5 producciones de este tipo (figura 4).

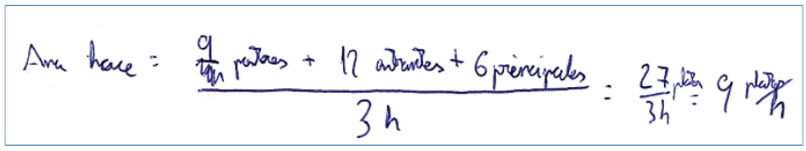


Figura 4. Estudiante que responde que Ana puede hacer 9 menús

— Destacamos que todos los participantes han calculado correctamente cuántos menús puede hacer Bernardo y que, aunque con diferencias, todas las estrategias incorrectas que han podido interpretarse están asociadas a considerar que se invierte la misma cantidad de tiempo en cada tipo de plato.

Diferentes estrategias correctas

Para analizar las estrategias correctas nos hemos centrado en si se calculaba, o no, el tiempo que Ana tarda en hacer cada menú. Esta cuestión es central si quiere abordarse la enseñanza de este tipo de problemas con estudiantes sin darles instrucción específica previa (Martínez-Juste y otros, 2019), es decir, desde un enfoque a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b).

— En 10 producciones se calcula de forma correcta el tiempo que tarda Ana en hacer cada menú. Este tiempo, 13/36 horas, se presenta en 9 producciones con la expresión decimal en minutos (21,666 ...) y en una producción se utiliza en forma compleja como 21 minutos y 40 segundos y con su expresión entera en segundos. En ninguna producción se utiliza notación fraccionaria. Por otro lado, 9 producciones utilizan el tiempo que le cuesta a Ana hacer un menú para calcular cuántos puede hacer en 3 horas (figura 5). Es llamativa la producción de la figura 6 en donde se razona que como Bernardo invierte 20 minutos en hacer cada menú y Ana invierte más tiempo, Bernardo va más rápido y como hace 9 menús (sin que le sobre tiempo), Ana, que va más lenta, no podrá hacer 9.

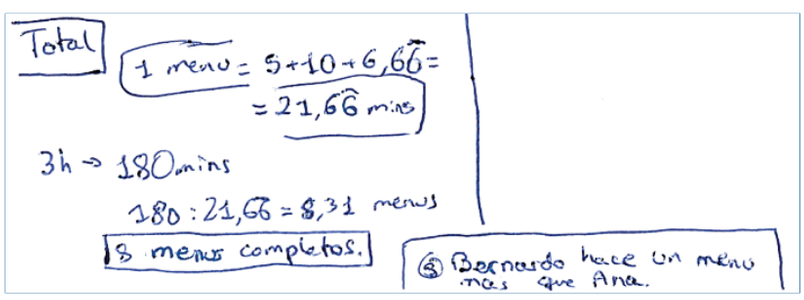


Figura 5. Estudiante que utiliza el tiempo que tarda cada participante para comparar velocidades y deducir quién hace más

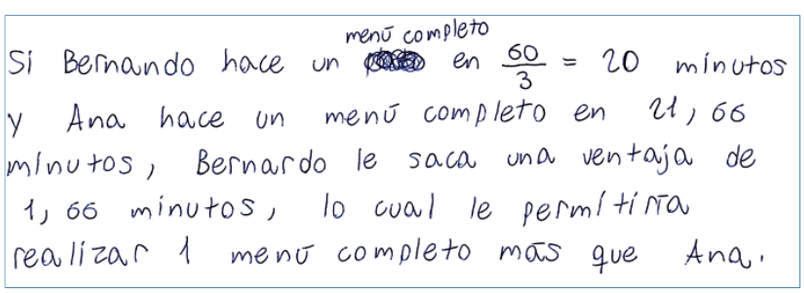


Figura 6. Estudiante que utiliza el tiempo que tarda Ana para calcular el número de menús completos que podrá realizar

— Por otro lado, 16 producciones utilizan la información sobre el número de menús que puede realizar Bernardo (9 menús) para argumentar, sin calcular el tiempo que emplea Ana en hacer cada menú, que Ana no puede hacer esa cantidad. Dentro de este bloque, encontramos múltiples formas de argumentar. Pondremos solo dos ejemplos. En la figura 7 vemos que se calcula el tiempo que tarda Ana en hacer 9 principales y 9 postres para ver que no le da tiempo de hacer 9 entrantes. En la figura 8 vemos que se calcula directamente el tiempo que le costaría a Ana hacer 9 menús.

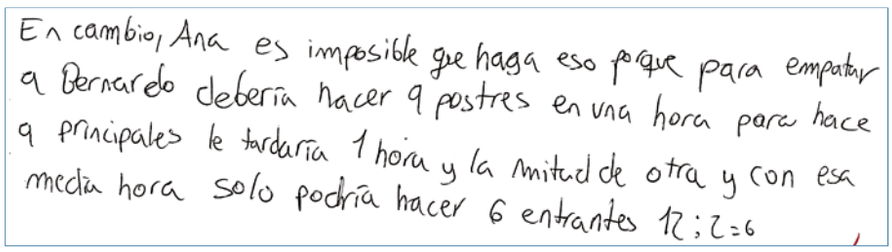
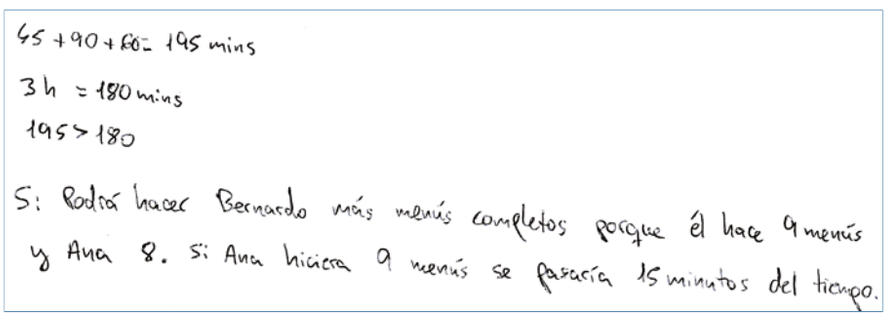

En cambio, Ana es imposible que haga eso porque para empatar a Bernardo debería hacer 9 postres en una hora para hace 9 principales le tardaría 1 hora y la mitad de otra y con esa media hora solo podría hacer 6 entrantes 12 : 2 = 6

Figura 7. Estudiante que argumenta que a Ana no le da tiempo de hacer 9 menús


65 + 90 + 60 = 195 mins

3 h = 180 mins

195 > 180

Si Podría hacer Bernardo más menús completos porque él hace 9 menús y Ana 8. Si Ana hiciera 9 menús se pasaría 15 minutos del tiempo.

Figura 8. Estudiante que calcula el tiempo que le costaría a Ana hacer 9 menús

En general, observamos una gran diversidad de formas de responder dentro de las 26 respuestas correctas. Destacamos que las respuestas del segundo bloque, en el que no se calcula el tiempo que Ana necesita para hacer cada menú, parecen depender de las peculiaridades de la estructura numérica del enunciado.

Reflexiones y conclusiones

En la enseñanza de la proporcionalidad imperan enfoques centrados en la adquisición de técnicas específicas y problemas estereotipados (Martínez-Juste, 2022). Sin embargo, los fenómenos que pueden ser modelizados por la proporcionalidad son muy amplios y permiten el diseño de problemas no rutinarios en los que los conceptos pueden aparecer de forma espontánea en las resoluciones de estudiantes que no han recibido instrucción específica para ese tipo de problemas. Podemos buscar situaciones realistas incluso en problemas con una estructura más compleja o que inicialmente podrían parecer menos naturales, como los problemas de repartos proporcionales, directos e inversos (Martínez-Juste y otros, 2018, 2019). La inclusión de este tipo de actividades en las secuencias didácticas permite orientar la práctica educativa hacia un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b).

Un claro ejemplo de este tipo de problemas lo encontramos en el problema 1 de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO. Muchos alumnos son capaces de calcular el equivalente a la constante de proporcionalidad del reparto guiados por el significado de las cantidades de magnitud enunciadas y de las operaciones aritméticas entre ellas. Este puede ser un buen indicador para valorar la adecuación de este problema (o uno similar) como situación introductoria si quiere plantearse una secuencia de enseñanza para los repartos proporcionales.

El problema 1, *La Gran Final*, se estructura como un problema de comparación entre dos situaciones diferentes (la forma en la que tiene que repartir el tiempo Ana y los menús completos que puede elaborar y la situación equivalente para Bernardo). Este tipo de problemas promueven la aparición de un amplio abanico de estrategias de resolución. Algunas basadas en el cálculo de la constante de proporcionalidad en cada situación y otras centradas en calcular solo una de las constantes y demostrar que la otra debe ser mayor o menor (o eventualmente igual). Incluir este tipo de problemas (los de comparación) en las secuencias de enseñanza de la proporcionalidad puede enriquecer el aprendizaje de los estudiantes ya que se promueve la interpretación de las constantes de proporcionalidad involucradas. Además, permiten una variedad muy rica de estrategias correctas de resolución que pueden aprovecharse en los debates de aula.

Por otro lado, la discreta tasa de éxito obtenida en la Olimpiada pone de manifiesto las dificultades que muchos estudiantes de 2.º de ESO presentan en el manejo de magnitudes, especialmente las intensivas, y en la interpretación de las operaciones básicas entre cantidades de magnitud (cabe destacar que, probablemente, los participantes en la fase final son estudiantes de una supuesta buena competencia matemática). Por tanto, sería deseable prestar una adecuada atención al trabajo aritmético en los primeros cursos de secundaria no dando por supuesto que los estudiantes tienen completamente adquirida esta componente del sentido numérico.

Referencias bibliográficas

Beltrán-Pellicer, P., y S. Martínez-Juste (2021a), «La resolución de problemas, mucho más que un eslogan», *Entorno Abierto* 42, 13-16.

— (2021b), «Enseñar a través de la resolución de problemas», *Suma* 98, 11-21.

Martínez-Juste, S. (2022), *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria* [Tesis Doctoral], Universidad de Valladolid, Valladolid.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén (2018), «¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa?», en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Libro de actas, CB-721, 121-129.

— (2019), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Marzo de 2022
ISSN: 2386-8821e

BY NC SA