Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 48
Septiembre de 2022

Esta crónica va a ser la última que escriba como presidente de la SAPM. La actual junta cumple cuatro años y de la asamblea de este inicio de curso (que será en noviembre y que convocaremos oportunamente) debe salir la persona que ocupe la presidencia y la nueva junta. Así que quiero aprovechar este espacio para hacer un llamamiento a todos los socios, para que acudan a la asamblea, por supuesto, pero también para que se involucren en el trabajo que se realiza desde la junta. Da lo mismo figurar con un cargo, lo importante es aportar ideas y trabajo para llevarlas a cabo.

Cuando empecé a pensar qué escribir en esta *Crónica* se me ocurrió hacer una lista de deseos que nos podríamos plantear como sociedad de profesores de cara al curso que acaba de empezar. Uno de esos deseos es el que he puesto en el párrafo anterior: que más socios se involucren en la puesta en marcha de actividades creadas y por crear. Pero también necesitamos incrementar nuestro número de socios. Tras varios años de crecimiento constante, en los dos últimos estamos estancados.

El inicio de curso es un buen momento para explicarles a los compañeros nuevos (y a los *viejos* también) qué es la SAPM y la FESPM. Y contarles que la cuota de socio da derecho a descuentos en jornadas, cursos o congresos organizados por cualquiera de las sociedades federadas, además de recibir los tres números anuales de *Suma*. Pero también sirve para que podamos seguir organizando las actividades que llevamos a cabo. En definitiva, se trata, como siempre, de asociarse para buscar un objetivo compartido, que en este caso es la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. También el inicio de curso es el momento de pensar en nuevas actividades que se puedan lanzar desde la SAPM.

Que ya que estamos con deseos, siendo más ambiciosos, deberíamos incluir en nuestra lista que nuestro Departamento de Educación se tome en serio, por fin, el objetivo citado en el párrafo anterior. Ya comentamos que se ha hecho un buen trabajo en la redacción del currículo (siempre mejorable, claro), todo partiendo de una decisión acertada a la hora de nombrar a algunas personas. Pero es que, en ocasiones, parece que las direcciones generales, más que colaborar entre ellas se ponen zancadillas unas a otras. Hay que seguir dando pasos y plantear una formación del profesorado de calidad y continuada, si se pretende que la nueva normativa produzca resultados a largo plazo. Pero también hay que hacer un esfuerzo por recopilar las buenas prácticas que se estén poniendo en práctica en Aragón y crear una red que conecte a los docentes de cara a que se compartan y mejoren estas buenas prácticas. Si hay voluntad, existen modelos institucionales de otras autonomías en las que fijarse. O seguro que aquí somos

Sumario Interactivo

Crónica del seminario de la FESPM Matemáticas inclusivas – Parte III

El contexto de la magia para introducir la resolución de ecuaciones de primer grado en primer ciclo de ESO

Para comenzar… el lauburu

Sobre la serie numérica

Tributo a tres trisecciones

únete
a la SAPM
click

capaces de crear nuestro propio modelo, acorde con nuestras características y que sea capaz de valorar y sacarle rendimiento a todo nuestro potencial.

Aunque pueda parecer una reclamación sindical, no nos podemos olvidar entre nuestros deseos para este curso que se mejoren las condiciones del profesorado, tanto a nivel de horas lectivas como de recursos disponibles, así como la reducción de la ratio. Estos aspectos repercutirán, sin duda alguna, en la mejora de la enseñanza.

A día de hoy, la SAPM no tiene planteadas grandes novedades de cara a actividades nuevas. Pero el curso promete estar bastante repleto. Quizás lo más *gordo* es la celebración de nuestra V JEMA. Así que desde ya os animo a que vayáis preparando vuestras comunicaciones para presentarlas. Iremos informando de los plazos; de momento, tenemos que montar la comisión organizadora, así que se admiten personas voluntarias.

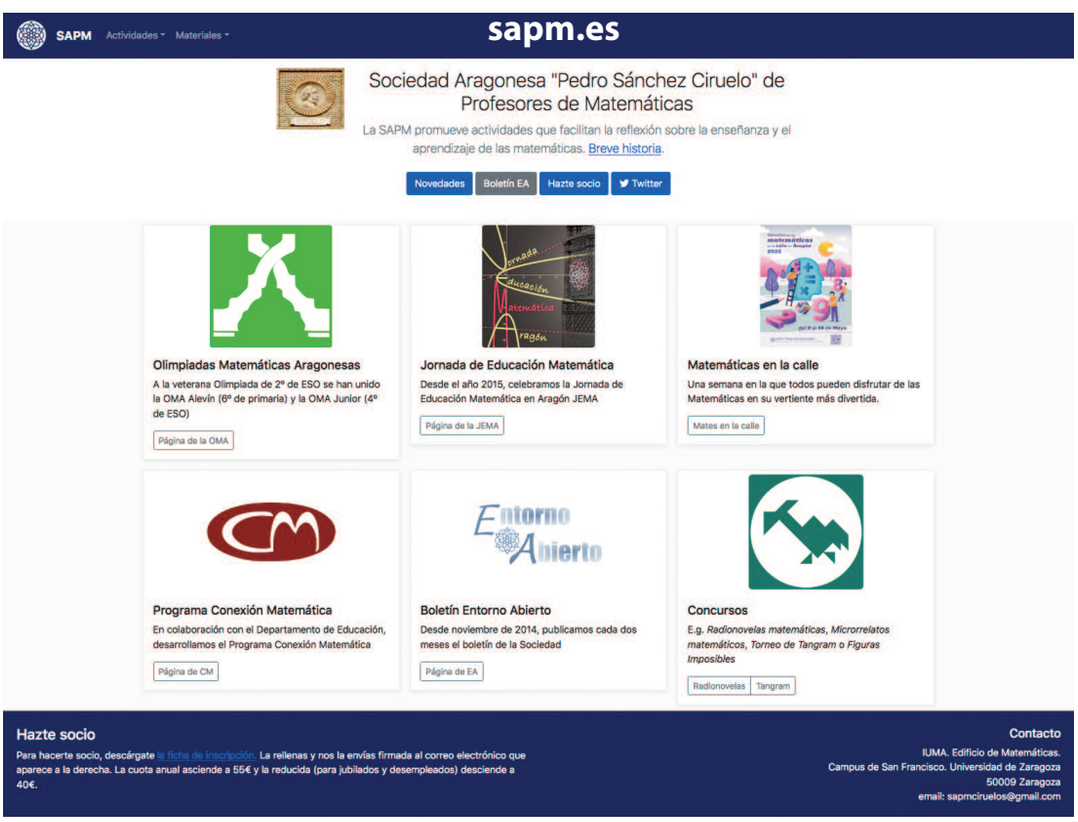
Vamos a repetir la Semana de las Matemáticas en la calle en Aragón. El curso pasado fue la primera edición y la satisfacción de los centros participantes nos ha animado a volverla a lanzar. Por supuesto, estamos deseando que más centros se sumen a la iniciativa. Necesitamos más de todas las provincias pero, especialmente de Huesca. Si queréis más detalles sobre la actividad podéis visitar la web <https://sites.google.com/view/matematicasenlacalle-te/> o escribirnos al correo de la Sociedad <sapmciruelos@gmail.com>.

El curso pasado decidimos alternar cada año el concurso de microrrelatos y el de radionovelas. Si este 2022 tuvimos las radionovelas, en 2023 convocaremos los microrrelatos (quizás con alguna sorpresa).

Y ¡cómo no!, tendremos olimpiadas. En plural, que como sabéis el curso pasado ya tuvimos tres modalidades: 5.º-6.º de primaria, 1.º-2.º de ESO y 3.º-4.º de ESO. En estos momentos estamos configurando los equipos para organizarlas (de nuevo se admiten nuevas incorporaciones) y replanteándonos algunos aspectos de la estructura. En todo caso, esperamos retomar el pulso anterior al 2020.

Entorno Abierto se publica cada dos meses y en sus cuarenta y siete números anteriores el boletín se distribuyó en la fecha que marca su cabecera. Ricardo Alonso desde el inicio y Julio Sancho unos números después, han trabajado denodadamente para que esto fuera así. Observaréis que este número llega casi medio mes tarde; tras el trabajo de Ricardo y Julio, habitualmente yo tengo que dar los últimos toques para el cierre definitivo. En esta ocasión, me ha resultado imposible hacerlo en fecha.

DANIEL SIERRA RUIZ
Presidente de la SAPM



Crónica del seminario de la FESPM *Matemáticas inclusivas* – Parte III

por
PABLO BELTRÁN-PELLICER
(Universidad de Zaragoza)

Terminamos con esta entrega la serie de artículos dedicados a la crónica del seminario «Matemáticas inclusivas». Se trata, sin duda, de un tema interesante que merecía la pena ser contado con detalle.

Conferencia de Begoña De la Iglesia Mayol
¿Cuándo podemos afirmar que una práctica es inclusiva?

La tercera de las conferencias, a cargo de Begoña De la Iglesia, se focalizó en las características que definen a una práctica como inclusiva. Comenzó señalando que un docente no solo ha de poseer conocimiento del contenido, sino también de su didáctica, y que en su desarrollo profesional hay que articular ambos. No se trata tanto de la búsqueda de recetas, como de incorporar un ciclo de mejora práctica-análisis-teoría al quehacer docente.

En consonancia con las anteriores ponencias, en esta también se incide en la necesidad de centrarse en las competencias, entendidas como lo que puede hacer el alumnado, más que en las carencias. Esto implica un concepto de equidad que conlleva un cambio de enfoque. Para fundamentar esta necesidad de cambio, la ponente adelanta desde el principio que se apoyará en dos dimensiones que se complementan: desde las aportaciones científicas y desde algunas historias de vida.

Antes de presentarnos a los personajes de las historias de vida, nos invitó a compartir nuestras opiniones acerca de un par de obras de arte (figura 1). Y es que la primera de ellas es una obra de Judith Scott, una artista visual con síndrome de Down y sordera profunda que no le impidió hacer sugerentes y enigmáticas composiciones, llegando a ser expuestas en grandes museos. Existe un documental *¿Qué tienes debajo del sombrero?* (Barrera y Peñafiel, 2006) que narra su vida. La pregunta que surge es… ¿qué habría pasado si solo hubiésemos sido capaces de ver las limitaciones del síndrome de Down?

La segunda obra es de Paul Smith, artista que nació con una severa parálisis cerebral que le impedía incluso comer, vestir o bañarse por sus propios medios (<https://youtu.be/xUxdsONJYxo>). Sin embargo, consiguió

Figura 1. Obras artísticas de Judith Scott (izquierda) y Paul Smith (derecha)

aprender a utilizar una máquina de escribir para «pintar». Tanto la historia de Smith como la de Scott tienen en común el tú puedes, junto con otros elementos: resiliencia y apoyos (facilitadores). El arte surge en ambas historias con un objetivo claro para mejorar la calidad de vida, algo que podemos trasladar al centro educativo. Así, el arte se configura como un instrumento para expresarse en plenitud, lo que puede enlazar con la concepción de las matemáticas como arte. Además, estas historias nos muestran que, aunque las dificultades y las carencias son evidentes, se trata de hacer visibles las capacidades y potenciarlas.

A continuación, al igual que ocurrió en la primera ponencia, Begoña De la Iglesia compartió unas reflexiones sobre lo que dice la legislación acerca del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo (ACNEAE). Para ello se sirvió del correspondiente decreto de las Islas Baleares (Artículo 13.2 del Decreto 67/2008, de 6 de junio), donde se define el término en un sentido amplio:

> a) El alumnado con necesidades educativas especiales que requiere, durante un período de escolarización o durante toda la escolarización, determinados apoyos y atenciones educativas específicas derivadas de una discapacidad, de trastornos graves de conducta o emocionales o de trastornos generalizados de desarrollo .
> b) El alumnado con dificultades específicas de aprendizaje causadas por trastornos del aprendizaje, trastornos por déficit de atención con o sin hiperactividad y trastornos graves del lenguaje.
> c) El alumnado con altas capacidades intelectuales.
> d) El alumnado con un desfase curricular de dos o más cursos por condiciones personales graves de salud o derivadas de factores sociales, económicos, culturales, geográficos y étnicos.
> e) El alumnado de incorporación tardía en el sistema educativo.

A pesar de esta definición de ACNEAE, en la normativa se siguen viendo algunas incoherencias que no terminan de facilitar del todo una escuela inclusiva.

El concepto mismo de dificultades de aprendizaje muchas veces se tiende a confundir. Es lo que nos recuerda la ponente, en primer lugar, mediante la definición de Rigo (2005):

> Pero, qué decir de los sujetos que ven bien, escuchan bien, controlan sus movimientos, tienen una inteligencia normal o superior a la normal y tienen un desarrollo emocional no patológico. Pero, sin embargo, fracasan en los aprendizajes escolares (lectura, escritura y/o matemáticas), sin que haya factores instruccionales o de deprivación cultural que, por sí solo, puedan explicar dicho fracaso?
> Aquí sí que hay discrepancia y paradoja, pues lo que encontramos no es el que esperábamos encontrar. Estos alumnos que no aprenden, cuando lo deducible era que lo hicieran sin especiales problemas, son los que nos plantean verdaderos retos intelectuales.

Las dificultades de aprendizaje incluyen dislexia, disgrafía, disortografía, discalculia y dificultades para la resolución de los problemas matemáticos. Ahora bien, conviene tener claro que no es lo mismo una persona con dificultades hacia las matemáticas que una persona con dificultades de aprendizaje hacia las matemáticas.

Algunas interpretaciones del calificativo ACNEAE (la ponente, en realidad, utilizó el acrónimo NESE) chocan con una concepción inclusiva y equitativa de la escuela. Por ejemplo, que ser ACNEAE implica poder recibir apoyos. Como si a este alumnado se le permitiera hacer trampa, es algo perverso. Esta interpretación, además, conlleva una visión del sistema centrado en las carencias, no en las capacidades del alumnado.

La ponencia, una vez explorada la dimensión de las historias de vida y la reflexión sobre la legislación, enfoca su mirada hacia la investigación. ¿Qué aporta? En primer lugar, que el modelo de enseñanza condiciona el aprendizaje y, en segundo lugar, que las metodologías únicas no facilitan formas alternativas de pensamiento. Sin embargo, además del empleo de diversas estrategias metodológicas (proyectos, rincones, gamificación, estrategias metacognitivas, ambientes, contratos de aprendizaje, aplicaciones TIC, grupos cooperativos, talleres, tutoría entre iguales, grupos interactivos, etc.) hemos de ir más allá e identificar qué es lo que hace que estas actividades sean inclusivas.

Diversos autores, como Ainscow, Booth y Dyson (2006) han desarrollado guías con indicadores de buenas prácticas inclusivas. Estos indicadores se pueden agrupar en tres categorías interrelacionadas: presencia, progreso y participación. Presencia, porque el alumnado al completo debe estar presente en todas las actividades del grupo de referencia. Participación, porque además de estar presente, todo el alumnado debe participar, lo cual no implica que todos participen de la misma manera, sino que deben plantearse actividades con múltiples posibilidades. Progreso, porque para que sea una situación de aprendizaje, todos deben progresar en su aprendizaje, aunque no lo hagan de la misma

manera. De fondo, adicionalmente, tenemos la cuestión de la autonomía. Es decir, que se fomente la autorregulación y la consciencia sobre el proceso de aprendizaje, a través de, por ejemplo, la evaluación formadora.

Para analizar qué apoyos, a quién, cuándo, dónde, etc., Begoña De la Iglesia nos propone el modelo Respuesta a la Intervención (RtI, *Response to Intervention*). Este modelo presenta un sistema basado en los apoyos y busca adaptar al máximo la intervención a la respuesta del alumnado, en un proceso cíclico en el que continuamente se evalúa y adapta la intervención. La clave está en que no se espera a que un alumno o una alumna tengan dificultades diagnosticadas, sino que la intervención tiene un carácter preventivo. Los apoyos se ofrecen en capas:

— Nivel 1, *apoyo universal*: enseñanza de alta calidad y apoyo en general para todo el alumnado.
— Nivel 2, *apoyo estratégico y suplemental*: se trata de intervenciones adicionales para estudiantes que necesitan mayor ayuda en destrezas específicas. Podemos pensar en los apoyos que se llevan a cabo en grupos reducidos heterogéneos (algo indisoluble de la escuela inclusiva que tiene a la equidad como objetivo).
— Nivel 3, *apoyo intensivo e individualizado*: Serían aquellas intervenciones diseñadas específicamente para cubrir las necesidades únicas de estudiantes individuales.

Este sistema de apoyos permite observar la respuesta del alumnado a diferentes niveles de apoyo, evitando la catalogación de dificultades antes de la intervención, que puede caer en el mero etiquetado. Al mismo tiempo, en consonancia con las características de una escuela inclusiva, permite centrarse en las capacidades.

De nuevo, en esta tercera ponencia aparece el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) (CAST, 2011, 2018) como forma de concebir la inclusión y que supone la eliminación de barreras, tanto físicas (el diseño universal nace originalmente en el ámbito de la arquitectura) como cognitivas, para el acceso al conocimiento. En síntesis, los principios del DUA son los siguientes:

— Proporcionar múltiples formas de representación de la información y de los contenidos (diferentes formatos, materiales, facilitadores visuales, etc.)
— Proporcionar múltiples formas de acción y de expresión del aprendizaje (oral, escrita, gráfica, motriz, acompañamiento del proceso, etc.).
— Proporcionar múltiples formas de implicación (interés, rol, compromiso, motivación, regulación, *feedback*).

El DUA permite que la secuencia de aprendizaje sea la misma para todos, haciendo innecesaria esa distinción entre alumnado con y sin dificultades. Así, lleva el foco de las dificultades al diseño de las secuencias didácticas, en lugar de centrarlo en un alumno en concreto.

En este punto de la ponencia, se establecen algunas conexiones interesantes con las anteriores, especialmente con la charla de Daniel Ruiz, ya que Begoña De la Iglesia pasa al análisis de actividades y prácticas inclusivas. De hecho, comienza presentando rápidamente una actividad WODB (¿Cuál es el que no encaja?) como un claro ejemplo de actividad para todos. Y, a partir de ahí, enlaza las actividades de suelo bajo y techo alto (SBTA) con el DUA. ¿Qué preguntas podemos hacernos para asegurarnos de que estamos ante una actividad de este tipo? Y, más que la actividad, que también, hemos de tener claro que será su gestión la que la termine haciendo inclusiva de verdad:

— ¿Qué queremos que el alumnado aprenda?
— ¿Cómo aseguraré que todos los estudiantes puedan tener éxito?
— ¿He ofrecido múltiples posibilidades de solución, representación e implicación? (DUA)
— ¿Qué obstáculos podrían presentar los estudiantes? (momentos de bloqueo)
— ¿Qué facilitadores daré para que superen estos obstáculos?
— ¿Qué preguntas podría plantear para impulsar el pensamiento reflexivo y crítico de los estudiantes? (enriquecimiento)
— ¿Qué material podría tener disponible para fomentar la autonomía de los estudiantes? (multisensorial)

Es decir, buscamos actividades accesibles para todo el alumnado, pero que no excluyan a nadie y que, al mismo tiempo, supongan un reto para todos. Los facilitadores no hay que entenderlos como algo que hace más fácil el contenido. Facilitan el acceso al conocimiento, que sigue siendo el mismo.

Si a pesar de las intervenciones en el marco de la escuela inclusiva las dificultades de aprendizaje hacia las matemáticas persisten, entonces es posible que estemos ante un alumno o una alumna con discalculia. Hay pocas pruebas estandarizadas, pero existen pruebas específicas. Complementando a lo dicho en la primera charla sobre discalculia, la ponente menciona a Geary (1993) quien distingue entre la discalculia procedimental (estrategias inmaduras, errores de recuento, lentitud) y la que tiene que ver con la recuperación de hechos matemáticos (que tiene que ver con la memoria de trabajo y donde los tiempos de respuesta no son siempre iguales).

Las pautas de trabajo con el alumnado incluyen evitar sobrecargar la memoria al proponer tareas y dejar suficiente tiempo, promover revisiones constantes, enfatizar la construcción del significado mediante la conexión con experiencias cotidianas o el uso de manipulativos, etc. Se trata, de nuevo, de diversificar la enseñanza y que las estrategias puestas en práctica puedan ser empleadas de forma autónoma.

En cuanto a la evaluación, los lectores quizá se hayan percatado de que antes se ha mencionado el calificativo de formadora. Si bien la evaluación formativa ya es aquella que va orientada al aprendizaje a partir del uso compartido de evidencias y no se queda en una función certificadora (evaluación sumativa), la evaluación formadora (Nunziati, 1990) es la que promueve la reflexión y la autorregulación.

Sesiones de los grupos de trabajo

La planificación original del seminario consideraba tres grupos de trabajo, dedicados a los siguientes aspectos:

— Grupo 1. Características de las tareas adecuadas para fomentar una enseñanza inclusiva de las matemáticas. Materiales manipulativos y tecnológicos apropiados.
— Grupo 2. Análisis de las dificultades específicas de aprendizaje y las necesidades de apoyo educativo para planificar acciones que garanticen que cada alumno se vea a sí mismo capaz de utilizar su conocimiento matemático para dar sentido a los problemas del mundo que le rodea.
— Grupo 3. Enfoque y funciones de la evaluación como componente fundamental para garantizar el éxito en la competencia matemática para todo el alumnado.

Debido a motivos organizativos, los participantes nos dividimos en dos grupos, de manera que uno estaría trabajando sobre las características de las tareas inclusivas, mientras que el otro se enfocaría en las dificultades específicas de aprendizaje y necesidades de apoyo educativo. La evaluación se abordaría de manera transversal tanto en uno de los grupos como en el otro.

Conclusiones y reflexión personal

A lo largo de este seminario quedó bastante claro que una tarea o una actividad, por sí sola, no es inclusiva. Puede tener el potencial de serlo, sí, pero lo que hará que sea inclusiva es la forma de presentarla, de construir el andamiaje y de gestionarla.

Una discusión muy interesante y sobre la que dimos bastantes rodeos fue en torno a la cuestión de si una actividad competencial es necesariamente inclusiva y viceversa. Realmente, cuando nos ponemos a describir las características de una tarea inclusiva (y su gestión en el aula), como que tenga diferentes puntos de acceso al conocimiento o que conecte con conocimientos previos, enseguida nos percatamos de los puntos en común con lo que se entiende por una actividad competencial. Es posible que la intersección plena sean las tareas de suelo bajo y techo alto (NRICH, 2013).

No me gustaría despedirme de esta crónica sin reflexionar sobre la aparición en escena del Diseño Universal de Aprendizaje. Las siglas DUA no llevan demasiado tiempo entre nosotros y mi sensación es que vamos a irlas viendo cada vez más. El objetivo que persigue es la inclusión y sus principios generales son excelentes, especialmente en términos de lo que podemos entender por accesibilidad. Así mismo, la idea de que la secuencia de aprendizaje debe ser la misma para todo el alumnado también es muy potente. Esto último no es exclusivo del DUA, claro, pero quizá sea una de las corrientes que mejor lo esté expresando en estos momentos.

Por otro lado, conviene tener presente que el marco de pautas DUA es generalista. Es decir, que ha de complementarse necesariamente con marcos inclusivos específicos del ámbito de la educación matemática. Que no se haya hablado apenas de DUA, hoy en día, en los congresos y reuniones de profesores e investigadores en didáctica no quiere decir que la inclusión no sea un tema que no preocupe a nuestra comunidad. De hecho, hay numerosos monográficos específicos en revistas y editoriales académicas sobre temas tan variados como diversidad, dificultades de aprendizaje en matemáticas, equidad, etc. En el terreno más práctico posible, las tareas de suelo bajo y techo alto son un excelente ejemplo de actividad inclusiva, pudiendo acudir a la mencionada NRICH, donde encontramos no solo las tareas, sino recomendaciones de uso y respuestas de alumnos.

También parece claro que la idea de inclusión está muy relacionada con nuestras propias creencias acerca de las matemáticas. Sin embargo, hemos acaparado ya muchas líneas con esta crónica y este tema requiere ser tratado en profundidad.

Por último, remitimos a los lectores a bucear en el *hashtag* de Twitter #matesinclusivas, que se empleó para compartir información (como la presentación de la charla de Daniel Ruiz Aguilera), sensaciones y fotografías durante los días de celebración del seminario.

Referencias bibliográficas

AINSCOW, M., T. BOOTH, y A. DYSON (2006), *Improving schools, developing inclusion*, Routledge.

CAST (2011), *Universal Design for Learning Guidelines, version 2*,. Center for Applied Special Technology.

CAST (2018), *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*, Center for Applied Special Technology, <http://udlguidelines.cast.org>.

GEARY, D. C. (1993), «Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components», *Psychological bulletin*, 114(2), 345.

NRICH (2013), *Low Threshold High Ceiling - An Introduction*, <https://nrich.maths.org/10345>.

NUNZIATI, G. (1990), «Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice», *Cahiers pédagogiques*, 280, 47-64.

RIGO, E. (2005), *Las dificultades de aprendizaje escolar. Manual práctico de estrategias y toma de decisiones*, Ars Medica.

El contexto de la magia para introducir la resolución de ecuaciones de primer grado en primer ciclo de ESO

por
Óscar Carrión Lostal
(IES Valdespartera, Zaragoza)

En el currículo de la asignatura de Matemáticas, la resolución de ecuaciones de primer grado aparece en el primer ciclo de ESO. En la siguiente propuesta se trata de introducir dicho contenido de una forma diferente, en este caso usando el contexto de la magia, y en concreto, la adivinación de números.

Los objetivos que nos proponemos son:

— Introducir el álgebra, en concreto, la resolución de ecuaciones de primer grado, de una forma distinta a los alumnos.
— Fomentar la comprensión lectora y complementar el plan lector del centro, así como participar en el plan de innovación del centro.
— Resolución de ecuaciones a través del contexto de la magia, en concreto, trucos para adivinar números, y con ayuda de un libro de lectura: *Ernesto, el aprendiz de matemago*.
— Proponer a los alumnos realizar sus propios trucos de adivinación de números, incluyendo todas las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y su puesta en práctica.

Contexto

Para lograr alcanzar los objetivos anteriores a nuestros alumnos de tres grupos de 2.º de ESO se les propuso la lectura y comprensión del capítulo 6, «El álgebra ayuda a la magia», del libro de lectura *Ernesto, el aprendiz de matemago*.

Destacar que los alumnos ya habían cursado en primero de ESO el tema de álgebra de ecuaciones de primer grado y su resolución, por lo que disponían de las herramientas necesarias para la comprensión del capítulo del libro de lectura, así como de la realización del truco y su puesta en práctica

Metodología

Después de la lectura en alto en clase se procedió a:

— Explicación y resolución con todo detalle de los ejemplos que aparecen en dicho capítulo a través de la herramienta matemática del álgebra, en concreto, la resolución de ecuaciones de primer grado.
— Propuesta de realización de un truco de magia por parte de cada alumno que contuviera como mínimo las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, tomando como modelo el ejemplo 2 que aparece en el libro de lectura.

— Resolución algebraica de dicho truco, es decir, obtención de la clave del truco, y puesta en práctica en su casa: amigos o familiares.
— Puesta en práctica en clase por parejas y en pequeños grupos: entre ellos practicaban y se realizaban dichos trucos.

Desarrollo

El ejemplo 2 del libro de lectura al que se hace referencia es el que se muestra en la figura siguiente, en la que aparece la equivalencia entre el lenguaje normal y el algebraico del truco.

Lenguaje normal	Lenguaje algebraico
Pienso un número	X
Resto 2 y multiplico por 2	$(X-2)\times 2 = 2\times X-4$
Sumo 5 y multiplico por 2	$(2\times X-4+5)\times 2 =$ $= (2\times X+1)\times 2 = 4\times X+2$
Sumo 1 y también el número pensado	$4\times X+2+1+X = 5\times X+3$
Obtengo al final 48	$5\times X+3 = 48$

Cabe destacar que el uso que se hace en el libro de la letra «x» para indicar la operación de multiplicación (notación usada en primaria) no es muy acertado. Llevó a algún error de interpretación por parte del alumnado ya que en secundaria se les acostumbra a usar el símbolo « · » para la multiplicación.

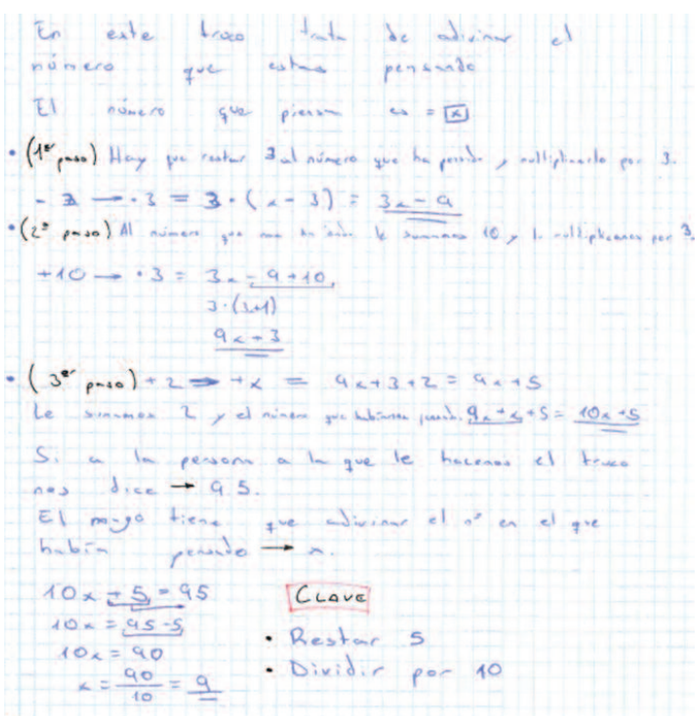
Hubo muchas preguntas durante el desarrollo de la clase ya que la comprensión lectora es uno de los hándicaps que tienen nuestros alumnos a la hora de plantear y resolver problemas en el área de matemáticas.

Al final comprendieron en su mayor parte que la clave para adivinar el número pensado era restar tres y dividir por cinco el número que nos dan como dato, lo que coincide con los pasos a dar para resolver la ecuación.

Resultados

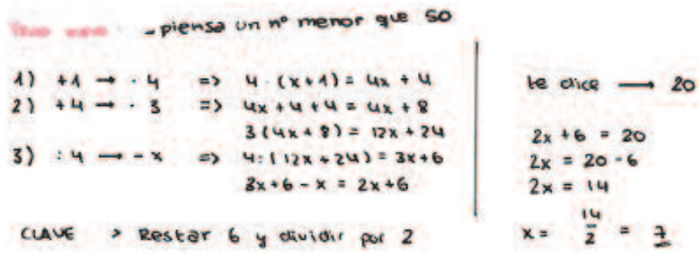
Veamos a continuación algunos ejemplos propuestos por los alumnos.

Alumno que usa tres operaciones básicas: suma, resta y multiplicación:



Alumnos que usan todas las operaciones básicas propuestas.

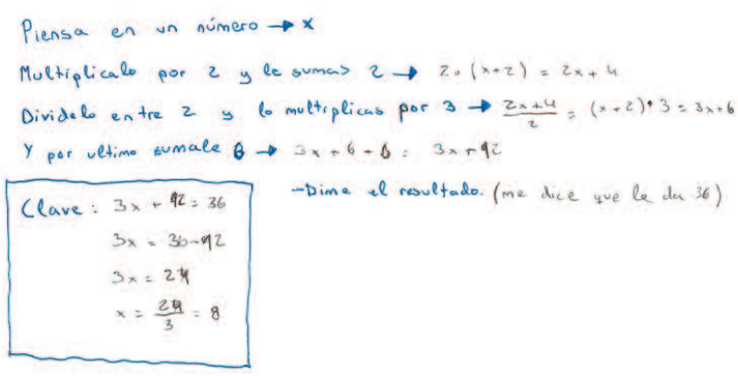
— Resolución de forma muy esquemática:



— Resolución más exhaustiva:

Alumnos que cometieron errores en alguno de los pasos.

— En el orden de prioridad en las operaciones: Multiplicar por un número y luego sumar otro donde en vez de realizar primero la multiplicación y luego la suma, primero suman y luego multiplican.
Primer ejemplo:



Segundo ejemplo:

Piensa 1 numero — x
Lo multiplicas por 2 y le sumas 3 → $2\cdot(x+3)=2x+6$
Lo divides entre 2 y lo multiplicas por 5 →
$\frac{2x+6}{2}=(x+3)\cdot 5=5x+15$
Le resto 3 → $5x+15-3=5x+12$
Clave: $5x+12=$ y (lo que le salga)

Piensa un n: y al numero le multiplicas por 2 y le sumas 3 despues a lo que te salga lo divides entre 2 y lo multiplicas por 5.

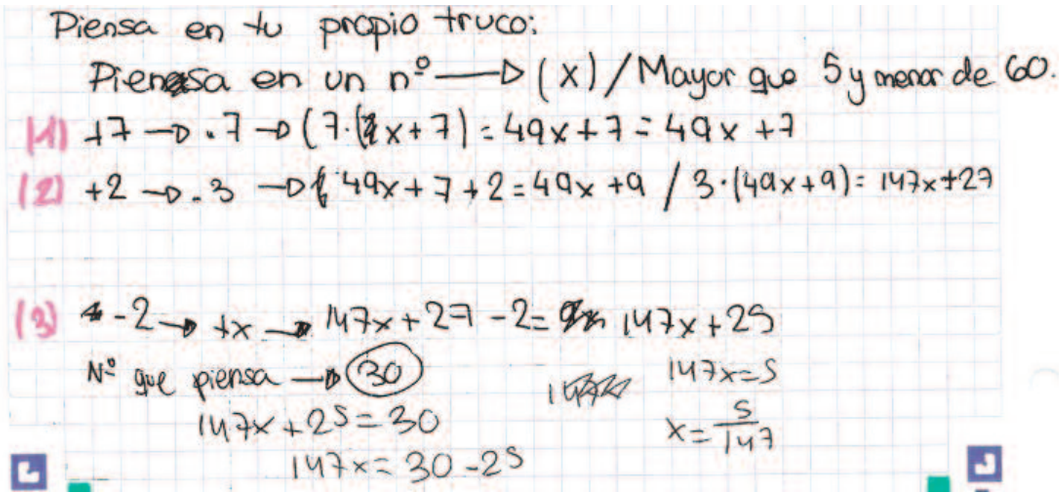
— Alumno que combina las operaciones de división y multiplicación para luego sumar o restar, y se equivoca al operar con fracciones y no sabe continuar:

(1) Piense en un nº → x (4)
(2) Divídelo entre 2 y lo multiplicas por 3 → $\frac{x\cdot 3}{2}$
(3) Súmale 3 y restale 2 → $\frac{3x+3}{2}-2$ → $3x+1$
$\boxed{\text{Clave}}$ → Sumar 1, Dividir 2
7 → $\frac{7+1}{2}$ → $\frac{8}{2}=4$

— Alumno que no termina el truco: No realiza la resta de los números y los arrastra y no termina las operaciones para obtener la clave del truco:

1) Piensa en un número (que sea mas de 5) → x
2) Suma 5 → $(x+5)$
3) Multiplicar 4 → $[4(x+5)]=4x+20$
4) Resta 2 → $4x+20-2$
5) Divide 2 → $\frac{4x+20-2}{2}$
6) Sumar el nº pensado →

— Alumno que confunde el número a adivinar con el número que se obtiene al hacer las operaciones:



Conclusiones

Este trabajo pone de manifiesto que hay que trabajar con los alumnos la lectura de textos científicos, en concreto, matemáticos, para ayudarles a desarrollar la comprensión lectora y a trasladar textos escritos en un lenguaje formal a su equivalente matemático preciso, ya que no están acostumbrados a ello.

En el transcurso de la experiencia han visto la utilidad de las matemáticas, más en concreto del álgebra, de la resolución de ecuaciones de primer grado, en la realización de trucos para adivinar números.

Referencias bibliográficas

Muñoz, J. (2003), *Ernesto el aprendiz de matemago*, Nivola, Madrid.

Para comenzar… el lauburu

por
Teresa Cepero Fustero y Arancha López Lacasta
(CPI El Espartidero, Zaragoza)

El curso 21-22, en 4.º Matemáticas Académicas del CPI El Espartidero, se comenzó repasando contenidos trabajados en cursos anteriores, con una unidad inicial dedicada al lauburu. Este curso 22-23, hemos repetido la experiencia ampliándolo a 4.º Matemáticas Aplicadas.

La idea surge el último día de clase de 3.º Matemáticas Académicas del curso 20-21. Durante todo el curso trabajamos contenidos teniendo como hilo conductor la estrella mudéjar (algo que surgió como unidad inicial), ese último día un alumno preguntó si seguiríamos con la estrella en 4.º, la respuesta fue que no, que llevábamos un curso entero «en Teruel», y, de forma irónica, le dijimos que nos íbamos «a subir al norte», teniendo en la cabeza Huesca y su pajarita. La sorpresa fue que, al cabo de unos minutos, el mismo alumno nos enseña un lauburu en su ordenador. Así que nos pusimos manos a la obra.

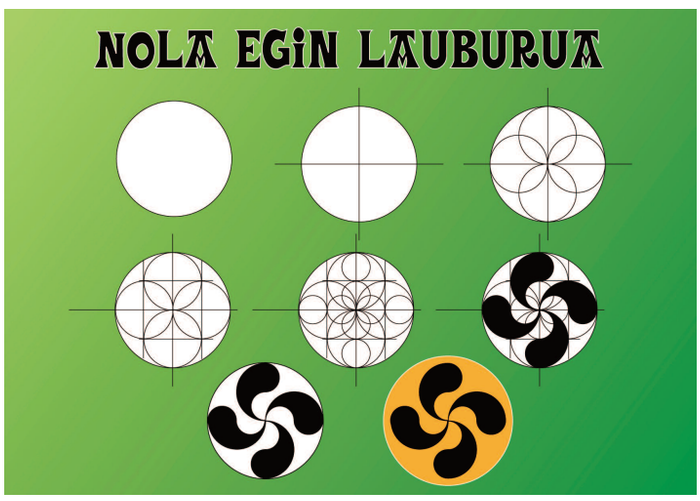


Figura 1. Lauburu por pepdesonrais en DeviantArt

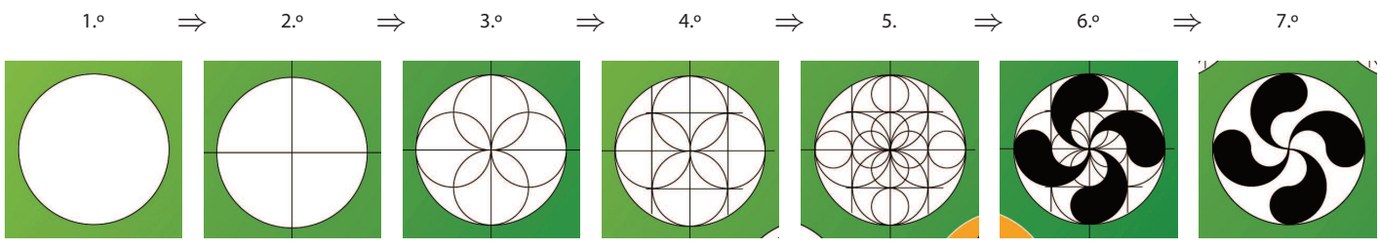
Encontramos por internet (figura 1) una imagen que nos motivó. Nos planteamos una unidad inicial donde repasar contenidos de cursos anteriores que se fueran a ampliar en 4.º, así como ofrecer contenidos nuevos. Esta fue nuestra selección:

— Uso correcto del lenguaje matemático
— Álgebra
— Movimientos en el plano
— Perímetros y áreas
— Semejanza de figuras. Proporcionalidad geométrica
— Puntos coordenados. Función lineal
— Redondeo de números. Números irracionales

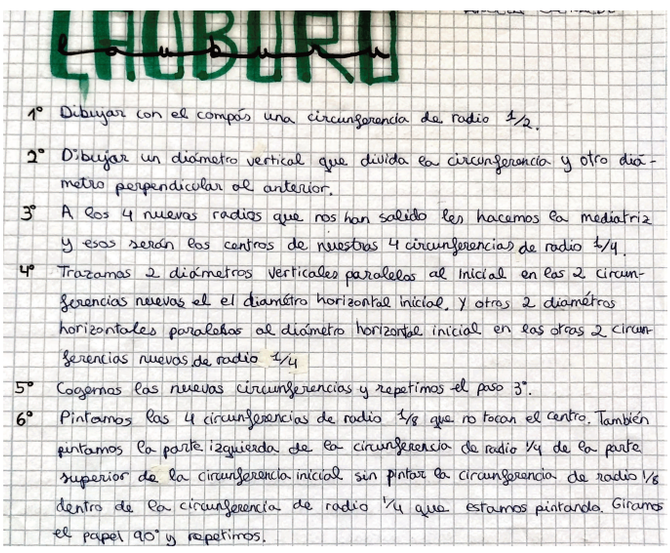
Para trabajar los contenidos anteriores, diseñamos 6 actividades:

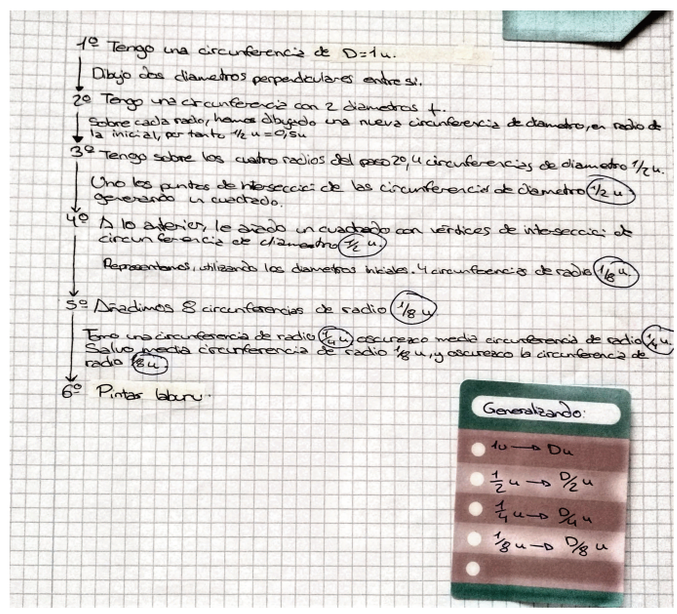
Proceso de construcción

Ayudados de la imagen, planteamos un trabajo inicial en gran grupo donde, entre todos, describir el proceso de construcción del lauburu si suponemos que el diámetro inicial es 1 unidad, primero con lenguaje coloquial, y poco a poco, utilizando un lenguaje «más matemático». A partir de tener claro este proceso, se les solicitó trabajar con diámetro *D*, y hacer uso de lenguaje «más algebraico».



Tras el trabajo en gran grupo, se les pidió que lo escribieran. Estos son dos de los resultados:

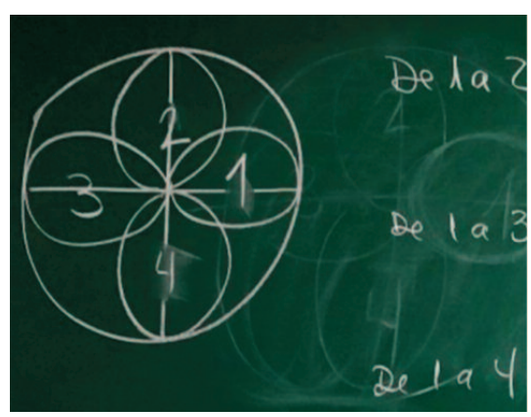




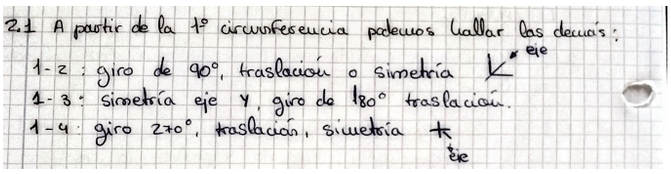
Movimientos

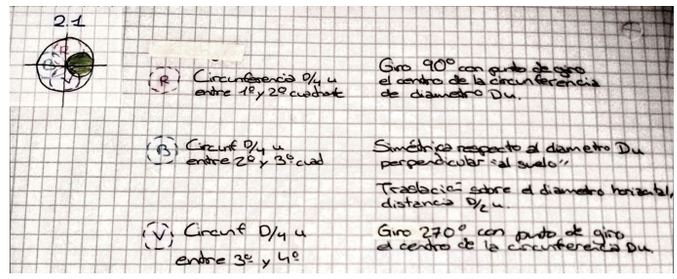
En 3.º, con la estrella mudéjar, trabajamos los giros, traslaciones y simetrías. Para repasar dichos conceptos planteamos que, a partir de la circunferencia de radio $D/4$ dibujada entre el primer y cuarto cuadrante, indicaran los movimientos para obtener las otras tres.

Así mismo, haciendo uso de un *applet* de GeoGebra de Javier Cayetano Rodríguez, se les preparó un video con un procedimiento de construcción del lauburu diferente. Con él debían describir matemáticamente el proceso de construcción, haciendo además uso de los diferentes tipos de movimientos que se observaban.



He aquí algunos de los trabajos de los alumnos:

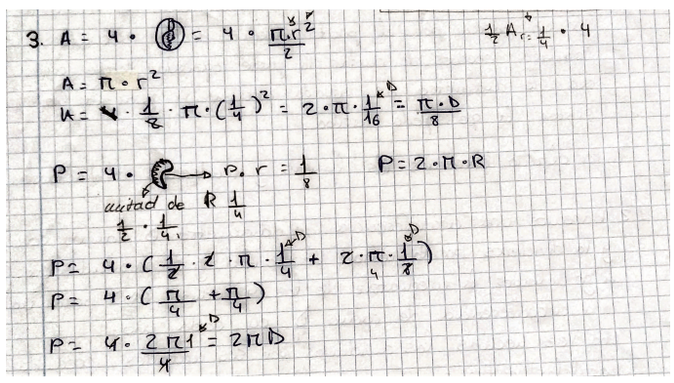




Perímetro y área del lauburu

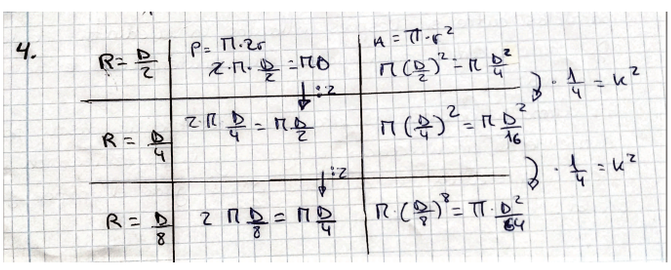
Pasamos a geometría plana con el cálculo del perímetro y área del lauburu de diámetro 1 unidad. Teniendo cuidado en los números que obtenemos, trabajando con precisión y mejorando el uso de la calculadora con fracciones y expresiones largas.

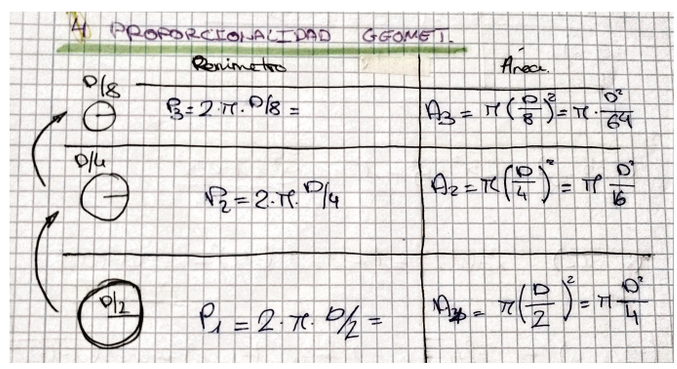
Tras ello planteamos la generalización del proceso considerando un diámetro de *D* unidades.



Proporcionalidad geométrica

En 3.º de ESO trabajamos de forma «intensa» la proporcionalidad geométrica que en el curso 19-20 nos tocó estudiarla durante el confinamiento. En este curso nos quisimos centrar en la constante de proporcionalidad de longitudes y áreas, de las circunferencias que nos llevaban al producto final, el lauburu.



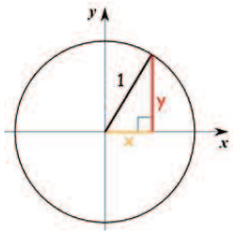


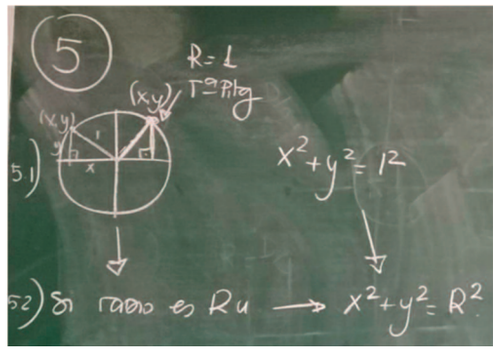
Ecuación de la circunferencia

Viendo la importancia de la circunferencia en la construcción del lauburu planteamos la pregunta «¿cuál es la ecuación de la circunferencia?».

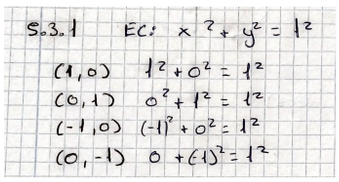
Esto asustó al alumnado puesto que hablábamos de «ecuación» algo que, por desgracia, justo ellos lo han tenido que trabajar de manera intensa en 3.º ya que en 1.º no vieron nada de álgebra y en 2.º les pilló el confinamiento.

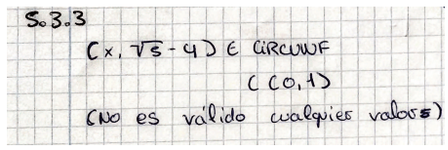
Tras el susto inicial, pronto le dimos la vuelta, cambiamos de pregunta y redescubrieron a Pitágoras.





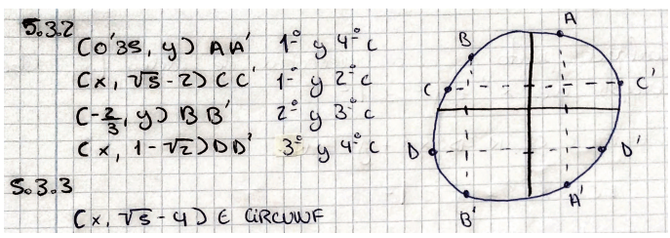
A partir de tener la ecuación y de la figura planteamos trabajar con los puntos de la circunferencia comprobando si cumplían o no la ecuación de la circunferencia.



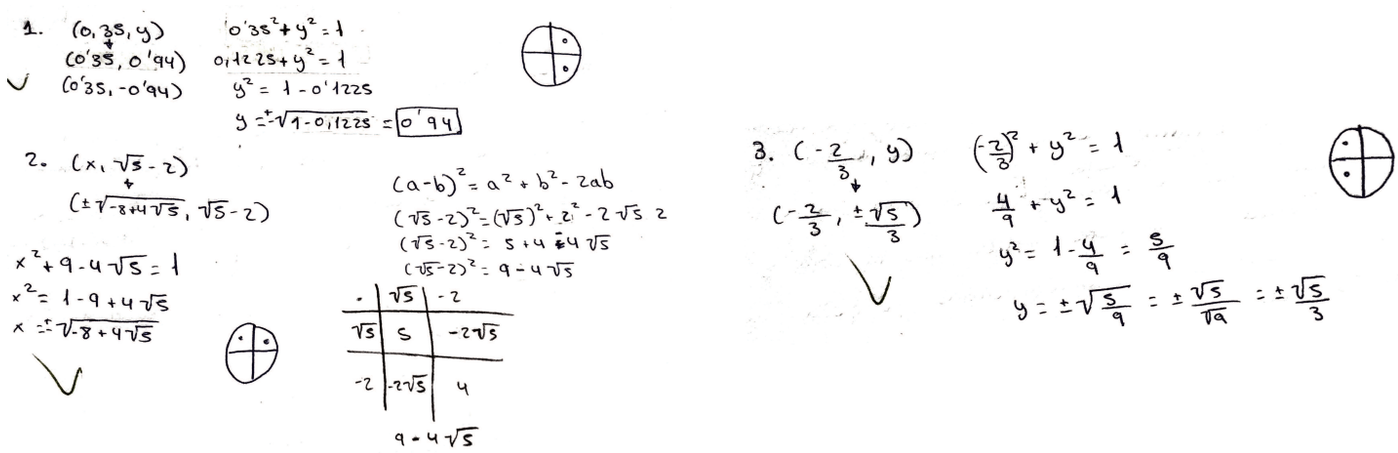


Tras esto, les planteamos la búsqueda de una coordenada conocida la otra de un punto de la circunferencia, trabajando en ello la resolución de ecuaciones de 2.º grado, los números y los cuadrantes.

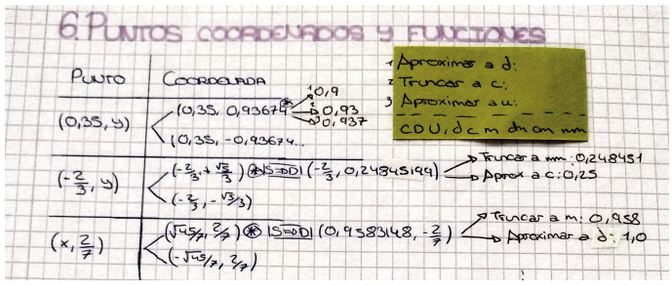
Las coordenadas conocidas en ambos casos estaban adaptadas a los conocimientos aprendidos hasta el correspondiente curso de 3.º. Así, en las Matemáticas Académicas:



Trabajando valor numérico de una expresión a partir de números decimales (aproximando), números fraccionarios (con la calculadora) o números radicales. Y dejando el camino abierto para descubrir la trigonometría en 4.º.

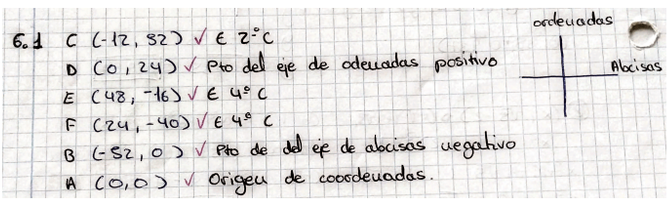


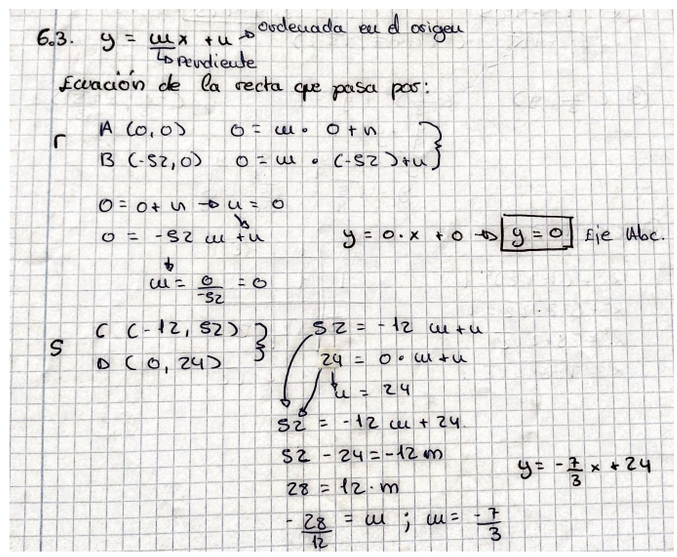
Mientras que en las Matemáticas Aplicadas:

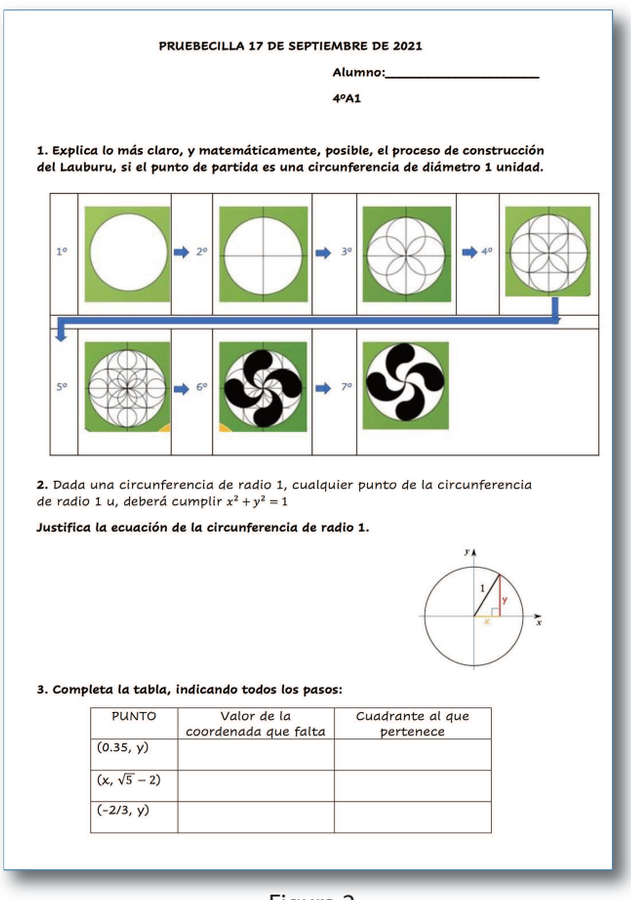


Puntos coordenados y funciones

Para repasar lo trabajado sobre funciones lineales en 3.º planteamos unir puntos concretos del lauburu, calcular las ecuaciones de las rectas y los puntos de corte entre ellas, trabajando con pendientes, sistemas de ecuaciones…







PRUEBECILLA 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

Alumno:_____

4ºA1

1. Explica lo más claro, y matemáticamente, posible, el proceso de construcción del Lauburu, si el punto de partida es una circunferencia de diámetro 1 unidad.

2. Dada una circunferencia de radio 1, cualquier punto de la circunferencia de radio 1 u, deberá cumplir $x^2 + y^2 = 1$

Justifica la ecuación de la circunferencia de radio 1.

3. Completa la tabla, indicando todos los pasos:

PUNTO	Valor de la coordenada que falta	Cuadrante al que pertenece
(0.35, y)		
(x, $\sqrt{5} - 2$)		
(-2/3, y)		

Figura 2

Una vez desarrollados estos seis apartados se decidió hacer una pequeña prueba objetiva de lo trabajado. En ella se daba énfasis al uso correcto del lenguaje matemático, al trabajo con números reales y a la aplicación de resultados matemáticos. La figura 2 muestra un ejemplo de la prueba hecha en las Matemáticas Académicas.

Sobre la serie numérica

por
Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte
(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Según su uso en el entorno cotidiano, podemos considerar que los números tienen diferentes significados en función del contexto en que los encontremos. Si ordenamos estos significados por dificultad en la comprensión de los mismos, encontramos las siguientes posibilidades. Un número puede ser el cardinal de una colección. Es decir, hacer referencia a la cantidad de elementos que contiene. También puede ser el ordinal de un elemento dentro de una colección ordenada. En este caso no informa sobre la cantidad sino sobre la posición dentro de un orden. En tercer lugar el número puede indicar el resultado de una medida. Y por último, podemos emplear los números como códigos, asignándoles el papel de etiquetas identificativas de objetos.

Sin embargo, antes de usar los números con estos significados, es necesario que los alumnos conozcan lo que llamamos la serie numérica. Es decir, la secuencia ordenada de símbolos (palabras en la serie oral y cifras en la serie escrita) que empleamos para designar a los números.

En este artículo nos vamos a centrar en este aspecto, de manera que los números aparecen sin significado. El objetivo es aprender la serie numérica. Aunque este aprendizaje también se consigue con actividades en las que los números tienen un significado (cardinales, ordinales o medida) pero en las que se exige una ordenación de los mismos.

Dentro de la serie numérica, distinguiremos entre la oral y la escrita. La primera está formada por las palabras-nombre de los números y la segunda por la grafía de los mismos. Nos centraremos en esta última, ya que cualquiera de las actividades planteadas se puede emplear para practicar la secuencia oral con una instrucción del maestro.

Hay que tener en cuenta que para los números pequeños, el aprendizaje de la serie escrita es posterior al de la serie oral, aunque se simultanean cuando trabajamos con números grandes.

En estas primeras etapas del aprendizaje de los símbolos que representan a los números (la serie numérica escrita) los niños encuentran gran dificultad en identificarlos cuando aparecen aislados, ya que son signos complejos con mucha dificultad al dibujarlos. También genera problemas hacerlo con la orientación correcta. Por ello, la presentación ordenada de la serie les ayuda a identificar los símbolos de los distintos números, ya que al reconocimiento del dibujo se suma el reconocimiento de la posición que ocupa en la serie (Chamorro, 2005).

Por supuesto, este proceso está ligado al aprendizaje del significado cardinal y ordinal de los números, de modo que puede ser interesante trabajar estos significados de forma conjunta con la identificación de los símbolos de los números. Al igual que en artículos previos, la mayor parte de los materiales que presentamos son abiertos, de modo que, al ser el maestro quien dirige la actividad y plantea las preguntas, puede trabajar ambos aspectos con los mismos materiales.

La colección de actividades para trabajar la serie numérica que planteamos a continuación presenta las siguientes características. En primer lugar aparecen actividades consistentes en colocar los elementos de la serie de forma ordenada en línea recta. La cifras pueden estar unidas a un elemento reconocible (como en el caso de *Ordena las casas*) o aparecer solas, en un ejercicio de carácter más formal (como en *La serie numérica*).

Aunque en muchas de estas actividades la serie aparece en horizontal, hemos incluido alguna en la que la representación de la misma es vertical, ya que puede ayudar a mejorar el esquema mental de la secuencia.

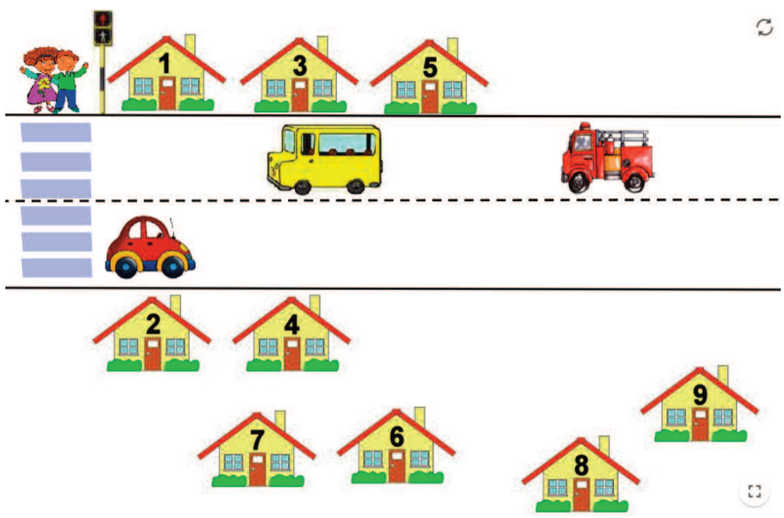
Un grupo posterior de actividades propone el uso de la serie sin comenzar por el elemento 1. Con ellas se pretende trabajar el reconocimiento de los números según los que tiene más cerca. El nivel de conteo de los niños que hagan estas actividades debería ser ya el de cadena rompible, es decir, que sean capaces de iniciar el conteo en cualquier elemento de la secuencia. Lógicamente, su dificultad es mayor a las anteriores.

Por último, proponemos un libro con actividades para trabajar el trazado de las cifras, por su relación con el tema el artículo. Estas actividades deberían plantearse siempre como un complemento al trazado sobre papel, que ocuparía un tiempo mayor en el aula.

Todas las actividades están recogidas en el libro Geogebra *La serie numérica*.

Ordena las casas

En una calle encontramos varias casas con números desordenados, por lo que tendremos que colocar cada casa en su lugar, arrastrándola, para formar la serie numérica del 1 al 10. Se trata de una secuencia horizontal ligada a un elemento cotidiano: la identificación de las casas. Además, ofrece un ejemplo de uso de los números como códigos, con un elemento muy cercano al alumnado. Esta actividad puede dar pie a un debate posterior en el que cada alumno comente el número de la casa en la que vive. Al tratarse de números con significado de código, no hay problema en que surjan los números del 10 en adelante, ya que no es necesario introducir la decena al no trabajar recuentos. Por ejemplo, los alumnos podrían nombrar e intentar escribir en la pizarra convencional el número de su propia casa.



En niveles más elevados también se puede construir la secuencia a la inversa, del 10 al 1, o se pueden introducir los conceptos de par e impar y ordenar las casas siguiendo este criterio.

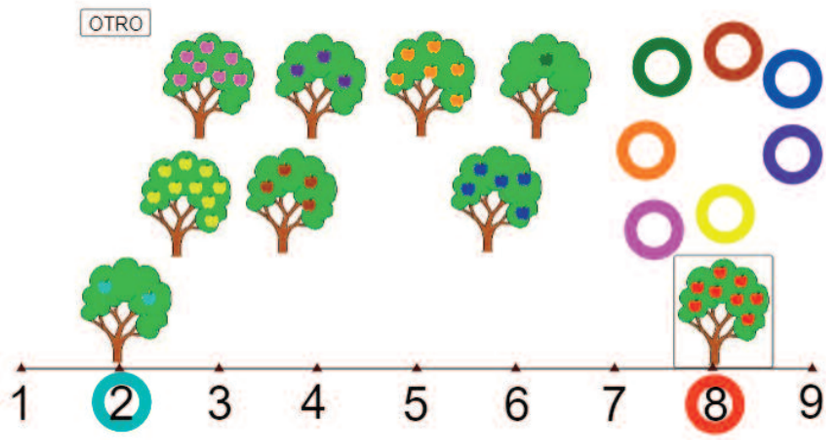
El despegue

Se presenta un escenario con un cohete listo para ser lanzado. Esto ocurrirá cuando se complete la secuencia numérica entre 1 y 10. Los alumnos deben arrastrar los números hacia la izquierda de la pantalla, formando una columna ordenada de números, con los menores abajo. Se trata, pues, de una secuencia vertical que simula la cuenta regresiva previa al despegue del cohete. De hecho, cuando la serie se completa correctamente, el cohete vuela hacia arriba llenando la pantalla de color a modo de fuego.

No obstante, se puede formar la secuencia entre 1 y 10 de la manera que se quiera: como serie creciente, colocando primero los pares y luego los impares, o al revés, hacerlo sin ningún tipo de orden, etc.

Secuencia de manzanas

En el escenario de esta actividad aparecen un conjunto de árboles y a su derecha nueve círculos de distintos colores. En la parte inferior se sitúa la recta numérica con los números del 1 al 9. Cada uno de los árboles tiene en sus ramas entre 1 y 9 manzanas, de un color diferente en cada árbol.



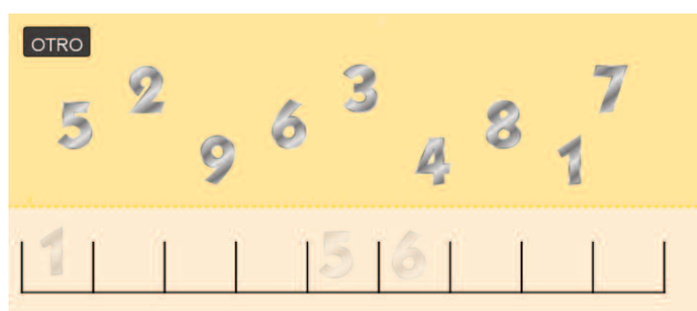
Al desarrollar la actividad realizaremos primero el conteo, posteriormente la relación entre grafía y cantidad, y la identificación de colores, ya que los colores de los círculos se corresponden con el color de las manzanas.

Una vez realizado el conteo de las manzanas de un árbol, seleccionamos el círculo del mismo color de dichas manzanas desplazándolo hasta el número correspondiente. También se puede desplazar el árbol. Así sucesivamente hasta colorear toda la secuencia numérica. Esta aparece en horizontal y completa, lo que facilita la realización de la actividad.

A diferencia de lo que ocurre en el material *Ordena las casas*, aquí los números tienen significado, no de código, sino de cardinal. Por eso también puede utilizarse para trabajar saltos en la recta numérica e introducir de esta manera la suma y la resta a partir de los conteos.

Cada vez que reiniciamos la actividad la posición de los árboles y los círculos varía.

Secuencia numérica

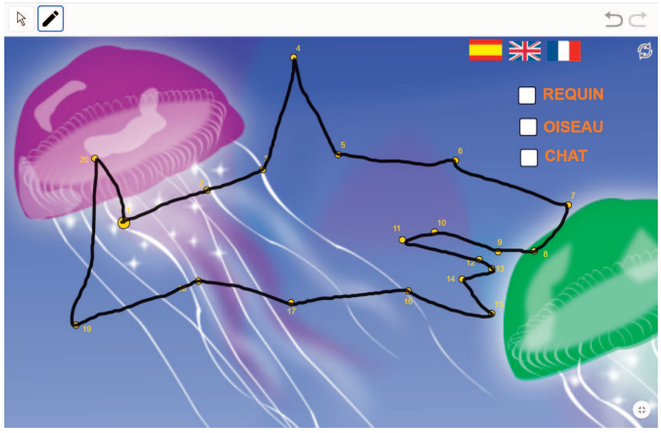


En este caso, la serie se muestra en horizontal y los números, entre 1 y 9, se pueden arrastrar para dejarlos sobre las casillas. Las casillas pueden aparecer vacías o bien pueden aparecer dos o tres números ya colocados, uno de ellos será el 1 siempre. Estos números aparecen con una opacidad más suave que los que están en la parte superior. Para realizar la actividad hay que colocarlos todos, incluidos los que aparezcan en las casillas. Si la serie se completa de forma correcta se inicia una animación indicando que se han ordenado bien los números. El botón OTRO muestra otro escenario, con diferentes cifras sobre las casillas y otra posición de los números que se encuentran en la parte superior.

Al aparecer números ya colocados podemos aumentar el número de propuestas respecto a las que se han comentado en la actividad anterior. Por ejemplo, se puede comenzar colocando los números anteriores y/o posteriores del número o de los números que ya están situados. O también poner en su posición correcta los números entre los que aparecen al inicio de la actividad.

De forma intencionada, las casillas en las que se deben colocar las cifras conforman una recta numérica, de modo que se puede emplear este material para comenzar a trabajar los saltos en la misma asociados a la introducción de las operaciones de suma y resta.

¿Qué animal soy?



Esta actividad simula el clásico juego sobre papel de unir con segmentos una colección de puntos, siguiendo el orden de la secuencia numérica. Para ello, se coge la herramienta lápiz y se sigue la secuencia en el orden correcto, comenzando por el 1. Al acabar, aparece la silueta de un animal reconocible.

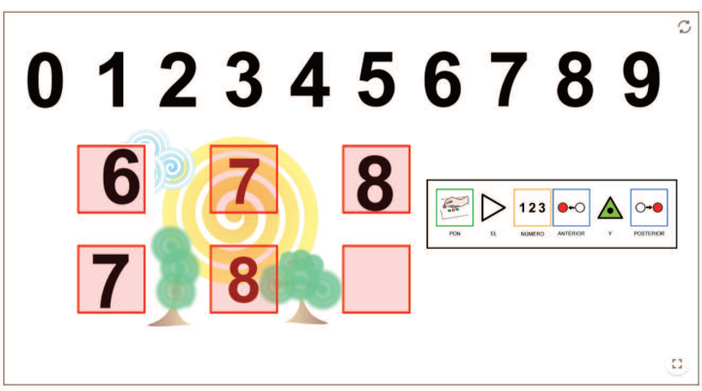
A la derecha de la pantalla, encontramos el nombre de tres animales. Una vez terminada la silueta, se debe picar en la casilla del margen derecho en el animal que el niño cree que es. Aparece el dibujo correspondiente al animal nombrado y así los niños pueden comprobar la corrección de su trazado.

En la secuencia aparecen los números del 1 al 28, por lo que es necesario que conozcan la secuencia numérica hasta ellos. Sin embargo no es necesario el conocimiento de la decena, ya que los números actúan como etiquetas.

Es una actividad trilingüe por lo que, pinchando en la bandera correspondiente, puede realizarse la actividad en castellano, inglés o francés.

Anterior y posterior de un número

Esta actividad muestra en la parte superior la secuencia numérica, comenzando en esta ocasión por el 0. Debajo aparecen dos números con sendos pares de casillas para colocar los números anterior y posterior al dado. Recargando la página, los números propuestos cambian y las casillas se vacían para comenzar de nuevo.



Además, la actividad incluye las instrucciones para usarla escritas con pictogramas obtenidos de ARASAAC.

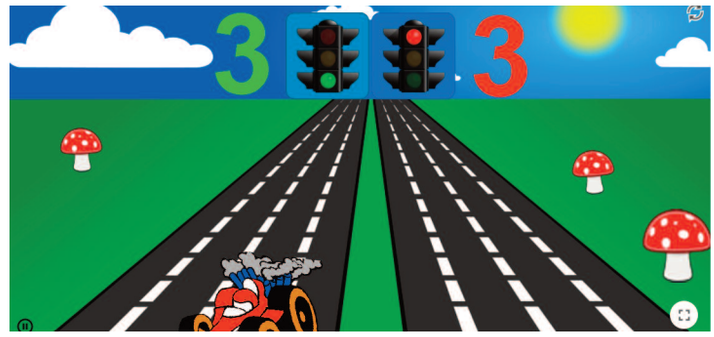
La dificultad de la actividad radica en que utilizan la secuencia sin comenzar por el uno (comienzan en el número que se les da) y la recorren (aunque solo sea un puesto) hacia delante y hacia detrás.

Cuenta atrás

En la pantalla inicial aparecen dos semáforos acompañados de dos números. Al lado del semáforo verde aparece un número que es el que hay que conseguir con la cuenta atrás que se inicia al presionar dicho semáforo. La cuenta atrás se activa en el semáforo rojo desde nueve y se para al presionarlo.

Si los dos números coinciden, el rojo y el verde, aparece un coche que viene desde el fondo y van surgiendo tantas setas como indica el número de los semáforos. Si se quiere volver a realizar otra cuenta atrás basta con presionar de nuevo el semáforo verde.

Con esto la actividad podría estar completa, si solo pretendemos trabajar la cuenta atrás, pero la aparición de las setas (el coche no vuelve a aparecer) permite otro tipo de actividades más abiertas, pues se pueden mover. Ade-

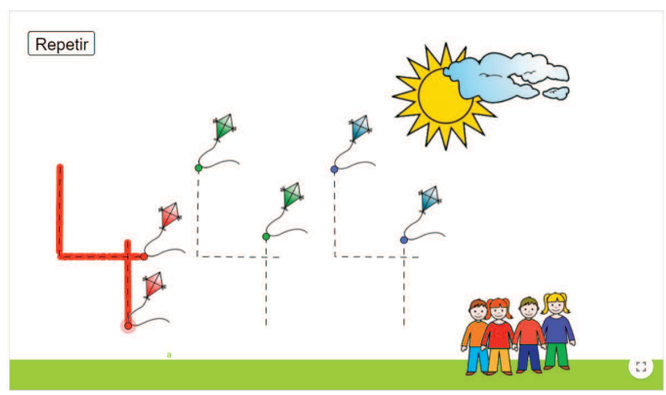


más, aportan el significado de cardinalidad a los números. Por ejemplo, colocar todas las setas en el césped de la izquierda, o repartir en partes iguales a uno u otro lado, o clasificarlas según los tipos de setas que vayan saliendo, escribir los números de cada parte, etc. Para volver a realizar la actividad es conveniente reiniciar la actividad con el símbolo que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla.

El hecho de que la secuencia se trabaje en el sentido inverso aporta dificultad a la actividad. A ello se suma el hecho de que exige mucha atención el estar pendientes de que, en la secuencia regresiva, aparezca el número que tenemos en el semáforo rojo.

Trazando cifras

Proponemos el uso de este libro para practicar el trazado de las cifras en la pizarra digital interactiva. Consideramos que esta actividad no debe sustituir al trazado individual sobre papel, pero puede ser un complemento que permite compartir la actividad con el resto de alumnos de la clase. También se puede emplear para que la profesora escenifique el trazado ante todos.



El libro tiene una actividad para cada cifra, entre el 0 y el 9. Es una combinación de actividades nuestras y de Ceferino A. (<https://www.geogebra.org/u/ceferino>). Algunas presentan animaciones y otras solo ilustraciones con tantos elementos como indica la cifra que se está dibujando, de modo que se puede realizar un conteo.

El orden que se propone para el trazado de las cifras no es el de la serie numérica, sino que se han agrupado por dificultad. En primer lugar se propone el trazado del 1, el 2 y el 3 como cifras de un solo trazo abierto y que siguen la orientación «izquierda-derecha». En el segundo grupo, incluimos las cifras de un solo trazo cerradas, o sea, el 6, el 9 y el 0. El orden es este porque es más difícil cerrar el 0 en el punto donde hemos comenzado que cerrar el 6, y el 9 implica repasar parte del trazado ya dibujado. En tercer lugar se proponen el 7, el 4 y el 5 como cifras que se dibujan con dos trazos. Entre ellas, el 7 es el más sencillo pues son dos trazos rectos. A continuación proponemos el 4 pues los trazos son rectos pero el primero va quebrado. Y por último va el cinco con su segundo trazo curvo.

Dejamos para el final el que consideramos el más complicado: el 8. Esto es debido al trazo cruzado que requiere.

Confiamos en que esta pequeña colección de materiales resulte de utilidad a la hora de abordar el aprendizaje de la serie numérica, reforzando a la vez las habilidades digitales de los alumnos.

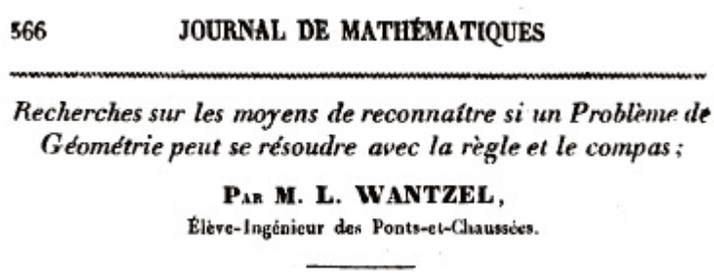
Referencias bibliográficas

Chamorro, C. (2005), *Didáctica de las Matemáticas para educación Infantil*, Pearson Educación, Madrid.

Tributo a tres trisecciones

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

La trisección de un ángulo cualquiera utilizando únicamente regla (sin marcar) y compás es uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega. Hasta 1837 no se demostró su imposibilidad. Lo hizo el ingeniero francés Pierre Laurent Wantzel en un trabajo publicado en el segundo volumen del *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* cuando apenas tenía 23 años.

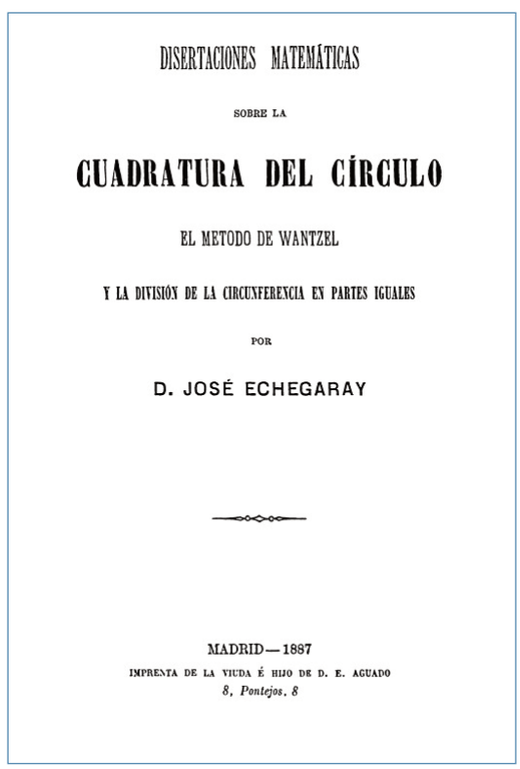

566 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Wantzel murió sin haber cumplido los 34 años, en 1848. Esto no resulta sorprendente teniendo en cuenta que en una nota necrológica publicada en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* leemos que: «no se acostaba hasta tarde; entonces leía y solo tomaba unas pocas horas de sueño atribulado, alternando entre el café y el opio, y comiendo a horas irregulares hasta que se casó. Confiaba ilimitadamente en su constitución, muy fuerte por naturaleza, de la que se burlaba a placer con todo tipo de abusos».

Su temprana muerte, el ser una figura relativamente oscura y otros factores relacionados con la propia naturaleza del resultado hicieron que, pese a la importancia que se atribuye actualmente a su trabajo, este pasara bastante desapercibido en su momento, incluso entre los matemáticos profesionales. Es interesante señalar que una de las primeras referencias explícitas que se conocen al trabajo de Wantzel es la del español José Echegaray, cuando ya habían pasado sin embargo 50 años desde la publicación del trabajo original.


DISERTACIONES MATEMÁTICAS

SOBRE LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO

EL METODO DE WANTZEL

Y LA DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES

POR

D. JOSÉ ECHEGARAY

MADRID—1887
IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO
8, Pontejos, 8

Si la demostración de Wantzel pasó relativamente desapercibida para los matemáticos profesionales, no es de extrañar que para los aficionados fuera completamente desconocida. En cualquier caso, resulta curioso observar que durante la segunda mitad del siglo XIX pareció darse en España un vivo interés por la cuestión de la trisección del ángulo. Algunas de las obras publicadas al respecto fueron:

— *Problema de la trisección del ángulo resuelto geométricamente* (Barcelona, 1861) de Leandro de San Germán y Malet.
— *Solución de la trisección gráfica del ángulo* (Madrid, 1870) de Isidoro Cabanyes.
— *Problemas geométricos relacionados con la trisección del ángulo su análisis y síntesis* (Barcelona, 1886) de Leandro de San Germán y Malet.

— *Trisección del ángulo y de su arco correspondiente* (Madrid, 1891) de Francisco Pérez Fernández Ruiz.
— *Juicio crítico sobre la trisección del ángulo* (Toledo, 1892) de José Campaláns y Garganta.
— *Geometría elemental: Problema de la trisección del ángulo* (Barcelona, 1899) de Leandro de San Germán y Malet.

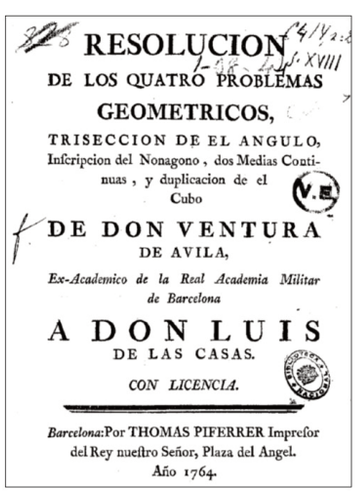
PROBLEMA
DE LA
TRISECCION DEL ÁNGULO,
RESUELTO GEOMÉTRICAMENTE
POR
D. LEANDRO DE SAN-GERMAN Y MALET.
BARCELONA.
LIBRERIA DE JOAQUIN VERDAGUER,
1861.

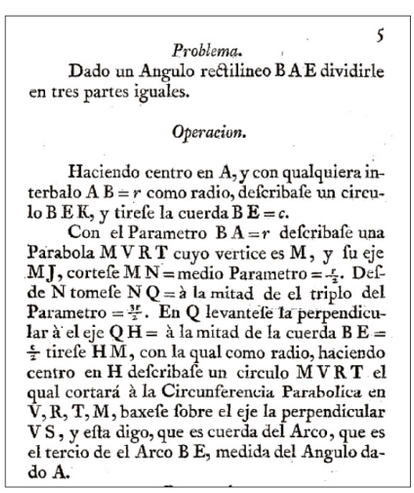
SOLUCION
DE LA
TRISECCION GRÁFICA
DEL ÁNGULO.
POR
DON ISIDORO CABANYES.
MADRID.
1870.

JUICIO CRÍTICO
SOBRE LA
TRISECCIÓN DEL ÁNGULO
TRISECCION DIRECTA DEL ANGULO
Don José Campaláns y Garganta
TOLEDO
1892

Este interés no era nuevo, por supuesto, pero sí que llama la atención la publicación de un número relativamente elevado de textos dedicados a un tema tan concreto a lo largo de un periodo de menos de 30 años. Como ya hemos dicho, la imposibilidad de resolver este problema no parecía ser un conocimiento extendido en la época. Por ejemplo, en el periódico *El Imparcial* de 21 de junio de 1891 se reseñaba la obra de Francisco Pérez Fernández Ruiz señalando que «cuantos conocen las ciencias exactas saben que este problema, así como el de la cuadratura del círculo, están pendientes de solución gráfica». Obviamente el autor de la reseña no había leído a Echegaray.

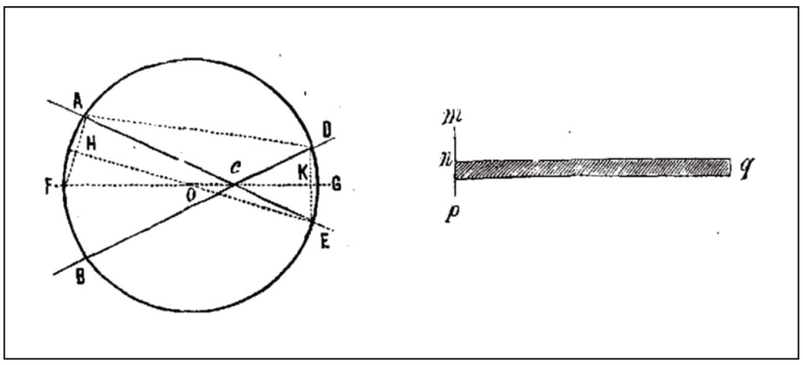
En realidad, aunque la imposibilidad de la trisección del ángulo se estableció con rigor en el siglo XIX, se trataba de una situación aceptada por la mayor parte de la comunidad matemática. Ya en la propia Grecia clásica parecían ser conscientes de ello y conocían soluciones al problema que hacían uso de curvas mecánicas o de instrumentos no permitidos como, por ejemplo, reglas marcadas. También, puesto que trisecar un ángulo cualquiera implica resolver una ecuación cúbica, el problema puede resolverse geométricamente intersecando secciones cúbicas, algo que el persa Omar Khayyam ya sistematizó en el siglo XI, o algebraicamente con los métodos desarrollados entre los siglos XV y XVI por del Ferro, Fontana o Cardano; y extendidos y popularizados por Viète o Descartes, entre otros. Estos métodos no eran desconocidos en España y los podemos encontrar en textos publicados en siglos anteriores, como por ejemplo en la *Resolución de los quatro problemas geométricos* (1764) de Ventura de Ávila. Como podemos observar, en esta obra el problema es resuelto geométricamente intersecando una parábola con una circunferencia.


RESOLUCION
DE LOS QUATRO PROBLEMAS
GEOMETRICOS,
TRISECCION DE EL ANGULO,
Inſcripcion del Nonagono, dos Medias Continuas, y duplicacion de el Cubo
DE DON VENTURA
DE AVILA,
Ex-Academico de la Real Academia Militar de Barcelona
A DON LUIS
DE LAS CASAS.
CON LICENCIA.
Barcelona: Por THOMAS PIFERRER Impreſor del Rey nueſtro Señor, Plaza del Angel.
Año 1764.


5
Problema.
Dado un Angulo reſtilineo B A E dividirle en tres partes iguales.
Operacion.
Haciendo centro en A, y con qualquiera interbalo A B = *r* como radio, deſcribaſe un circulo B E K, y tireſe la cuerda B E = *c*.
Con el Parametro B A = *r* deſcribaſe una Parabola M V R T cuyo vertice es M, y ſu eje M J, corteſe M N = medio Parametro = $\frac{r}{2}$. Deſde N tomeſe N Q = à la mitad de el triplo del Parametro = $\frac{3r}{2}$. En Q levanteſe la perpendicular à el eje Q H = à la mitad de la cuerda B E = $\frac{c}{2}$ tireſe H M, con la qual como radio, haciendo centro en H deſcribaſe un circulo M V R T el qual cortará à la Circunferencia Parabolica en V, R, T, M, baxeſe ſobre el eje la perpendicular V S, y eſta digo, que es cuerda del Arco, que es el tercio de el Arco B E, medida del Angulo dado A.

Vemos pues que la posibilidad de resolver el problema de la trisección por medios algebraicos y geométricos era bien conocida, pero no lo era tanto la imposibilidad de hacerlo únicamente con regla y compás. Este es el contexto en la segunda mitad del siglo XIX cuando aparecen las obras que hemos presentado anteriormente. Vamos a comentar tres de ellas, cuyas portadas hemos reproducido antes, y que tienen características muy diferentes en cuanto al origen y formación del autor, los objetivos perseguidos en la obra, etc.

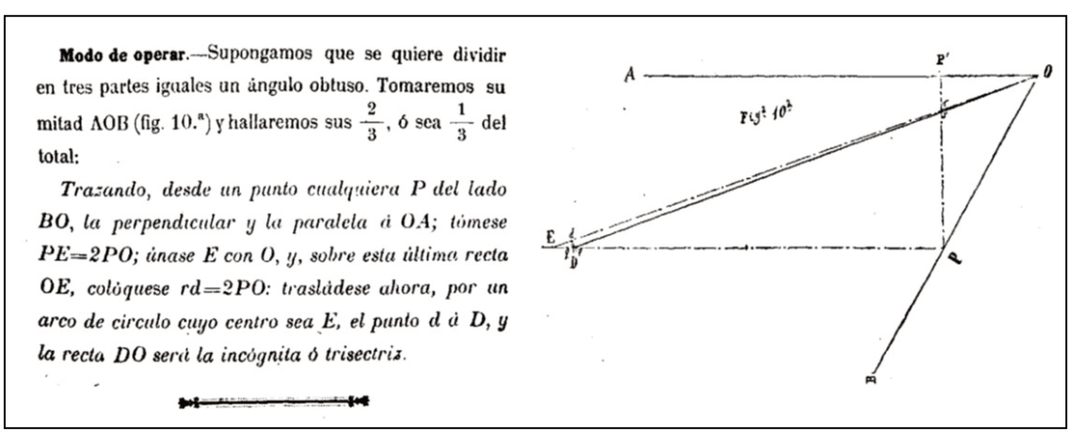
En primer lugar, el texto de Cabanyes (un militar formado en la Academia de Artillería de Segovia) resuelve el problema de forma exacta y rigurosa, pero utilizando instrumentos no permitidos. Lo hace en dos fases:



— Se demuestra que si se quiere trisecar el ángulo *ACB* de la figura (parte izquierda), es necesario trazar una circunferencia cuyo centro esté en la bisectriz de dicho ángulo y de modo que el arco *AB* sea doble del arco *DE*. En tal caso el ángulo *DAE* es la tercera parte del dado. La demostración de esto es elemental y se basa únicamente en propiedades de ángulos inscritos e interiores en una circunferencia. De esta forma el problema se reduce a construir dicha circunferencia.

— Para poder construirla es necesario hallar su centro y su radio. Para conseguirlo el autor hace uso de la escuadra que vemos en la parte derecha de la figura. En ella *mp* es perpendicular a *nq* y, además, *mn* es igual a *np*. No vamos a entrar en detalles, pero en esencia el uso de este instrumento implica la construcción de un cierto lugar geométrico que termina por resolver el problema. La demostración rigurosa que da el autor es completamente algebraica.

Por su parte, el texto de Campaláns (que fue profesor de segunda enseñanza, entre otros lugares, en el Instituto Provincial de Teruel) proporciona una resolución que solo hace uso de regla y compás sin graduar. Por tanto necesariamente ha de ser aproximada. El autor es consciente de este hecho y al presentar un método propio, lo introduce con las palabras «el problema se resuelve breve y suficientemente aproximado empleando el siguiente modo de operar». En la figura vemos el procedimiento de Campaláns para trisecar un ángulo obtuso.



Modo de operar.—Supongamos que se quiere dividir en tres partes iguales un ángulo obtuso. Tomaremos su mitad AOB (fig. 10.ª) y hallaremos sus $\frac{2}{3}$, ó sea $\frac{1}{3}$ del total:

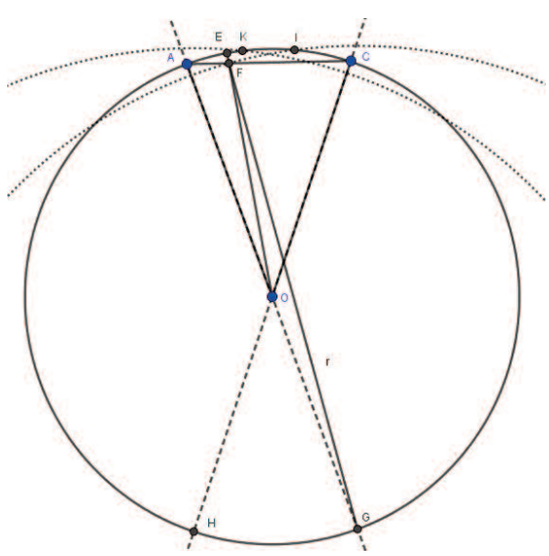
Trazando, desde un punto cualquiera P del lado BO, la perpendicular y la paralela á OA; tómese PE=2PO; únase E con O, y, sobre esta última recta OE, colóquese rd=2PO: trasládese ahora, por un arco de círculo cuyo centro sea E, el punto d á D, y la recta DO será la incógnita ó trisectriz.

Tras ello, el autor reflexiona sobre el concepto de exactitud en los siguientes términos: «En el constante debate entre la exactitud práctica y la matemática o científica, se presentan al Geómetra poderosos auxiliares en su favor que no debe despreciar, utilizándolos para mantener aquella exactitud en los justos límites de un buen resultado o desarrollo gráfico […] abrigamos el atrevido concepto de que no tendría importancia una resolución geométrica más exacta, puesto que la exactitud práctica objetivo único de nuestras investigaciones, se lleva con el trazado expuesto, hasta donde permitan los instrumentos de que, para el caso, hoy podemos servirnos. En cuanto al rigor científico, imposible de apreciar con la regla y el compás, nos lo proporciona ya la geometría analítica, resolviendo este problema con una ecuación de tercer grado».

Terminamos con la obra de San Germán (un aficionado prácticamente autodidacta). A diferencia de los anteriores, el autor afirma haber resuelto el problema de forma exacta: «Me puse a trabajar con ahínco, retiréme de la sociedad y de mis negocios, con grave detrimento en mi salud e intereses para estar exclusivamente ocupado en este empeño. Después de algunos años de penosos esfuerzos abrigo el convencimiento de haber logrado la resolución del célebre problema de la trisección del ángulo, con el único auxilio de la regla y el compás común, instrumentos que hasta hoy en día se tenían por insuficientes, y de terminar su expresión por fórmulas tan sencillas como exactas».

Es evidente que los esfuerzos de San Germán, pese a sus palabras, debieron ser infructuosos. No obstante, reproducimos aquí el supuesto «método general para dividir un ángulo y su arco en tres partes iguales» que el autor resume en siete pasos. El autor no proporciona una figura ni denota los elementos de la construcción en modo alguno (la notación es nuestra). Por ello, adjuntamos una figura propia realizada con la ayuda de GeoGebra. Recomendamos al lector que efectúe la construcción personalmente, ya sea con GeoGebra o con regla y compás:

— Haciendo centro al vértice del ángulo dado (AOC), con una apertura de compás cualquiera (hemos tomado $OA = OC$), descríbase una circunferencia que corte a los lados de dicho ángulo, quedando convertidos en radios.
— Únanse los extremos de estos lados o radios por medio de una cuerda (AC).
— Prolónguense dichos lados o radios por la parte del vértice hasta encontrar la circunferencia convirtiéndose en diámetros (obtenemos los puntos H y G).
— Tírese un radio que vaya a parar a la primera cuarta parte del arco del ángulo en cuestión (OE).
— Desde el punto de intersección entre dicha cuerda y este radio (F), tírese una recta al extremo opuesto del lado prolongado de cuyo principio hemos tomado la cuarta parte del arco en el punto anterior (FG).
— Con una apertura de compás igual a esta línea (r es la longitud de FG), y desde los extremos de los lados prolongados (H y G), opuestos al vértice, por la parte del arco que mide el ángulo, háganse dos intersecciones (K e I), y quedará dividido este arco en tres partes iguales.
— Por dichas intersecciones tírense radios, y tendremos el ángulo dividido en tres ángulos iguales.



A simple vista la construcción parece proporcionar una aproximación bastante buena. Al realizar la construcción con GeoGebra podemos jugar con distintos valores del ángulo de partida para valorar la calidad de la aproximación y para comprobar que, como ya sabíamos, la construcción no es exacta. En la tabla siguiente damos algunos valores de las medidas de los ángulos implicados (redondeadas con dos cifras decimales, lo que explica las posibles inconsistencias en algunos de los casos):

Ángulo AOC	*Ángulo AOK = Ángulo IOC*	*Ángulo KOI*	*Ángulo AOC/3*
5,06º	1,71º	1,64º	1,69º
13,96º	4,72º	4,51º	4,65º
28,38º	9,59º	9,19º	9,46º
44,31º	14,94º	14,42º	14,77º
72,22º	24,20º	23,82º	24,07º
89,64º	29,88º	29,87º	29,88º
105,29º	34,92º	35,46º	35,10º
179,92º	59,97º	59,99º	59,97º

Como vemos la aproximación es, en efecto, buena. El error absoluto está por debajo de medio grado y la construcción parece funcionar de forma similar tanto para ángulos pequeños (próximos a cero), como grandes (cercanos a un llano). Por otro lado, los datos de la tabla parecen sugerir que la construcción pueda ser exacta para los casos en que el ángulo AOC es recto o llano. Dejamos en manos del lector la comprobación de si esto es cierto, o no.

Otra tarea interesante que puede abordar el lector consiste en realizar un estudio similar con la construcción de Campaláns que hemos visto antes y compararla con la que acabamos de describir, tanto en términos de exactitud como de sencillez. Respecto a esto hay que tener en cuenta, y es una reflexión interesante a realizar (recordando las palabras citadas de Campaláns), la diferencia entre usar una regla y compás imaginarios e ideales (GeoGebra) y unos reales, que conllevan inevitablemente un error en el trazado de las líneas.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Septiembre de 2022
ISSN: 2386-8821e

BY NC SA