Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 49
Noviembre de 2022

El pasado miércoles 2 de noviembre se convocó la Asamblea General Ordinaria de nuestra Sociedad que tuvo lugar en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias. En ella se renovó la Junta Directiva cambiando de presidencia que no de rumbo, y contando con vuestra confianza ¡seguimos!

ESTHER GARCÍA GIMÉNEZ
Presidenta de la SAPM

Σrio Interactivo

Estrategias ante un problema que moviliza ideas sobre probabilidad condicional en la XXX Olimpiada aragonesa de 2.º ESO

Felipe Medrano y sus cuadrados mágicos

Formas geométricas básicas planas

únete a la SAPM

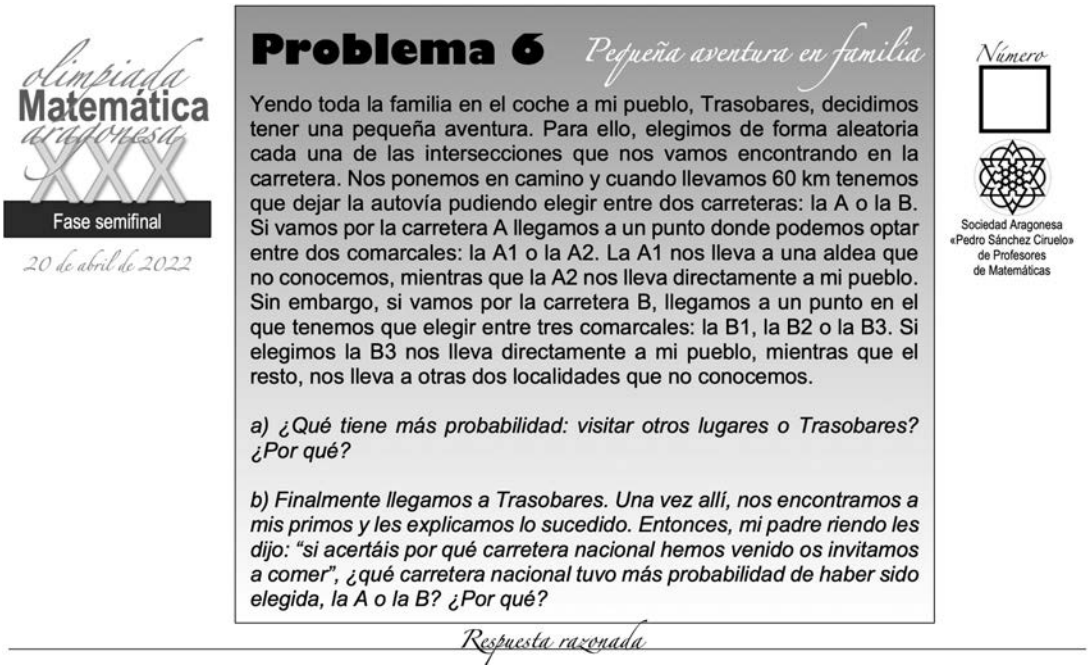
click

Estrategias ante un problema que moviliza ideas sobre probabilidad condicional en la XXX Olimpiada aragonesa de 2.º ESO

por
J. M. Rubio-Chueca, J. M.ª Muñoz-Escolano y Pablo Beltrán-Pellicer
(Universidad de Zaragoza)

Teniendo en cuenta la importancia de la probabilidad, sus significados y la dificultad en su enseñanza (Batanero, 2014; Borovcnick, 2012), en este artículo se lleva a cabo un análisis en la resolución de un problema de probabilidad condicional en la semifinal de la XXX Olimpiada Matemática Aragonesa. Los problemas de probabilidad no son muy comunes en las Olimpiadas Matemáticas de 2.º de ESO (Rubio-Chueca, Muñoz-Escolano y Beltrán-Pellicer, 2021) por lo que hay poca evidencia de cómo los estudiantes se desenvuelven en ellos. Mostramos el enunciado del problema y cómo es abordado por los diferentes participantes considerando diversas estrategias. Revisamos la red de significados acerca de la probabilidad que emergen en el proceso de resolución, el vocabulario y las representaciones usadas. En ese sentido, se observa cómo algunos participantes, al resolver el problema, ponen sobre la mesa ideas intuitivas de la probabilidad condicional y conjunta, en función de los sistemas de representación usados en el proceso.

El problema se propuso en la semifinal de la XXX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón y su enunciado es el siguiente:


olimpiada Matemática aragonesa XXX
Fase semifinal
20 de abril de 2022

Problema 6 *Pequeña aventura en familia*

Yendo toda la familia en el coche a mi pueblo, Trasobares, decidimos tener una pequeña aventura. Para ello, elegimos de forma aleatoria cada una de las intersecciones que nos vamos encontrando en la carretera. Nos ponemos en camino y cuando llevamos 60 km tenemos que dejar la autovía pudiendo elegir entre dos carreteras: la A o la B. Si vamos por la carretera A llegamos a un punto donde podemos optar entre dos comarcales: la A1 o la A2. La A1 nos lleva a una aldea que no conocemos, mientras que la A2 nos lleva directamente a mi pueblo. Sin embargo, si vamos por la carretera B, llegamos a un punto en el que tenemos que elegir entre tres comarcales: la B1, la B2 o la B3. Si elegimos la B3 nos lleva directamente a mi pueblo, mientras que el resto, nos lleva a otras dos localidades que no conocemos.

a) ¿Qué tiene más probabilidad: visitar otros lugares o Trasobares? ¿Por qué?

b) Finalmente llegamos a Trasobares. Una vez allí, nos encontramos a mis primos y les explicamos lo sucedido. Entonces, mi padre riendo les dijo: "si acertáis por qué carretera nacional hemos venido os invitamos a comer", ¿qué carretera nacional tuvo más probabilidad de haber sido elegida, la A o la B? ¿Por qué?

Número

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Respuesta razonada

Contexto

En la fase semifinal de la XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO participaron 606 alumnos y alumnas de distintas localidades de Aragón. Esta fase semifinal de la olimpiada autonómica se llevó a cabo el sábado 20 de abril de 2022 en diecisiete sedes. En ella, se propusieron seis problemas durante dos sesiones de una hora cada una con un descanso entre cada sesión de media hora, sobre diferentes contenidos. Para su resolución estaba permitida la utilización de instrumentos de dibujo y calculadora. Goñi (2022) indica, de los seis problemas propuestos en la semifinal, el problema que analizamos fue en el que los participantes obtuvieron mayor puntuación y también presenta una posible resolución de este.

Estrategias en las respuestas correctas de los participantes a la primera cuestión

Recordemos que el apartado a) demandaba:

> ¿Qué tiene más probabilidad: visitar otros lugares o Trasobares? ¿Por qué?

Clasificamos las respuestas correctas que hemos encontrado en dos grandes categorías atendiendo al razonamiento presente en las mismas, dependiendo de si hallan la probabilidad total o si únicamente comparan las probabilidades condicionales en cada carretera.

Razonamiento probabilístico hallando la probabilidad total desde un significado clásico

La resolución a dicho problema se puede llevar a cabo con un razonamiento probabilístico desde el significado clásico de la probabilidad teniendo en cuenta las probabilidades iniciales simples, condicionadas, finales conjuntas y la probabilidad total. Además, puesto que el enunciado del problema habla de aleatoriedad, pero no de equiprobabilidad, asumimos como resolutores la equiprobabilidad existente al llegar a cada una de las intersecciones y tengamos que elegir entre las diferentes carreteras.

En el análisis de las resoluciones del alumnado se contabilizan 55 participantes que utilizaron un razonamiento probabilístico usando la probabilidad total.

Es destacable que 47 de los participantes usaron algún tipo de representación diagramática, como el diagrama de árbol, para facilitar y buscar la estrategia adecuada.

En este caso (figura 1), el alumno, ayudado por la representación del diagrama de árbol, calcula cada una de las probabilidades implicadas en el problema obteniendo finalmente un resultado óptimo comparando las dos probabilidades: la de visitar otros lugares y la de ir a Trasobares.

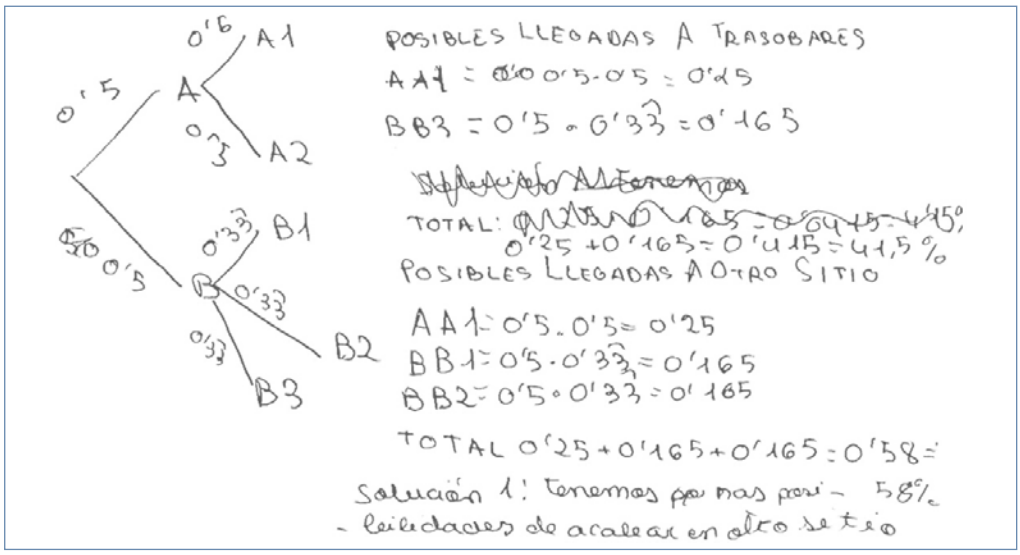


Figura 1. Estrategia del apartado a) teniendo en cuenta la probabilidad total usando un diagrama de árbol

De manera formal, en la resolución se aplica el teorema de la probabilidad total:

$$p(\text{Trasobares}) = p(A \cap A1) + p(B \cap B3) = p(A) \cdot p(A1 \mid A) + p(B) \cdot p(B3 \mid B) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$p(\text{Otros lugares}) = p(A \cap A2) + p(B \cap B1) + p(B \cap B2) = p(A) \cdot p(A2 \mid A) + p(B) \cdot p(B1 \mid B) + p(B) \cdot p(B2 \mid B) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12}.$$

Esta utilización del diagrama de árbol (figura 1) para representar las diferentes probabilidades en sus ramas es un uso estándar que no se relaciona de forma directa con anteriores usos de los diagramas de árbol, como cuando se emplea para el conteo de colecciones de objetos. Intuimos que el alumnado que ha usado esta representación ha sido instruido en este tipo de problema.

Por otro lado, 8 de ellos dieron una solución correcta al problema sin emplear ningún tipo de representación diagramática (figura 2).

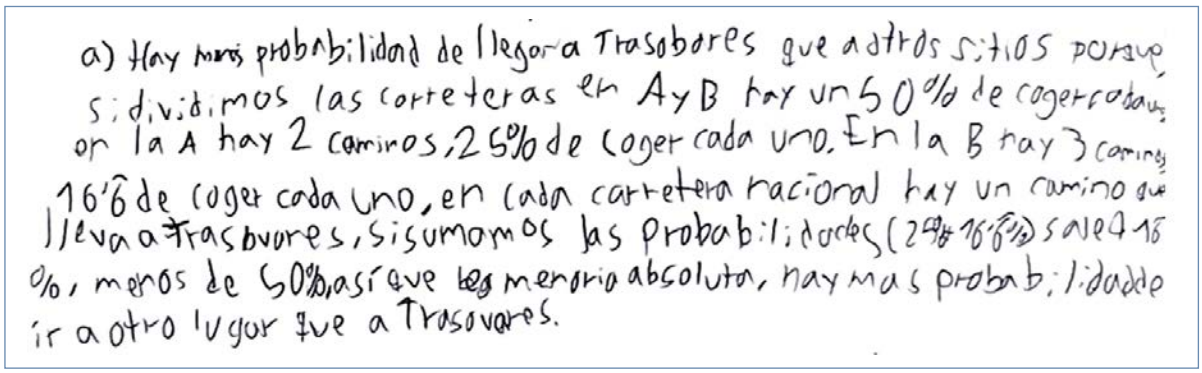

a) Hay más probabilidad de llegar a Trasobares que a otros sitios porque si dividimos las carreteras en A y B hay un 50% de coger cada una, en la A hay 2 caminos, 25% de coger cada uno. En la B hay 3 caminos 16'6 de coger cada uno, en cada carretera nacional hay un camino que lleva a Trasobares, si sumamos las probabilidades (25% 16'6%) sale 41'6 %, menos de 50%, así que en memoria absoluta, hay mas probabilidad de ir a otro lugar que a Trasobares.

Figura 2. Estrategia del apartado a) teniendo en cuenta la probabilidad total sin usar ninguna representación

En esta ocasión, para dar la solución, el participante halla las probabilidades iniciales, conjuntas y la probabilidad total de llegar a Trasobares, observando que es menor que el 50%.

Razonamiento probabilístico comparando únicamente las probabilidades condicionales usando un significado clásico

Además de las respuestas anteriores, que siguen una estrategia más «escolar», en varias soluciones propuestas por el alumnado encontramos otra forma de resolver este problema. Así, la siguiente estrategia de resolución pasa por usar las probabilidades condicionadas teniendo en cuenta la equiprobabilidad al elegir los caminos en cada una de las intersecciones y que por las dos carreteras A o B podemos llegar al pueblo de Trasobares.

Un ejemplo sobre el razonamiento en que se apoya esta categoría es el siguiente: en la carretera A tenemos la misma probabilidad de ir al pueblo que a otros lugares y, por tanto, $p(A1 \mid A) = p(A2 \mid A)$ y, por tanto, por aquí dará igual a la hora de decantarnos por qué es lo más probable, y por otro lado, una vez que nos encontramos en la carretera B lo más probable es acabar en otro lado, $p(B3/B) < p((B1 \cup B2)/B)$. Así que, de la composición de ambas situaciones, es más probable ir a otros lugares que ir a Trasobares ya que, si de forma aleatoria decidimos ir por A, tenemos la misma probabilidad, pero, si decidimos ir por B, la probabilidad de llegar a otros lugares será el doble.

En este tipo de respuestas correctas, el alumnado también suele cuantificar la probabilidad de algunos de los sucesos, pero no calcula la probabilidad total, ya que no se le exigía en el enunciado del apartado, sino solo que comparase qué suceso era más probable.

El número de participantes que han resuelto esta parte del problema con un razonamiento probabilístico parecido es 33, sin necesitar para ello la probabilidad total.

Entre ellos, 14 también usan algún tipo de representación diagramática, como el diagrama de árbol, para apoyar su razonamiento. En este caso (figura 3), el participante calcula cada una de las probabilidades en porcentaje cuando llega a las intersecciones.

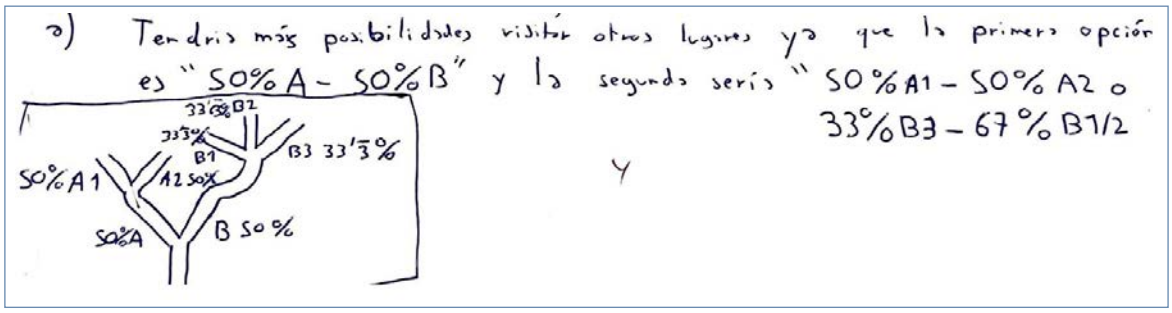


Figura 3. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta la probabilidad total usando un diagrama de árbol

Los 19 restantes no usaron ningún tipo de representación para visualizar la estrategia a seguir. Un ejemplo de esta forma se puede ver en la figura 4. En este caso concreto, el participante ha calculado únicamente las probabilidades condicionales, utilizando la comparación en cada caso para dar una respuesta bien argumentada.

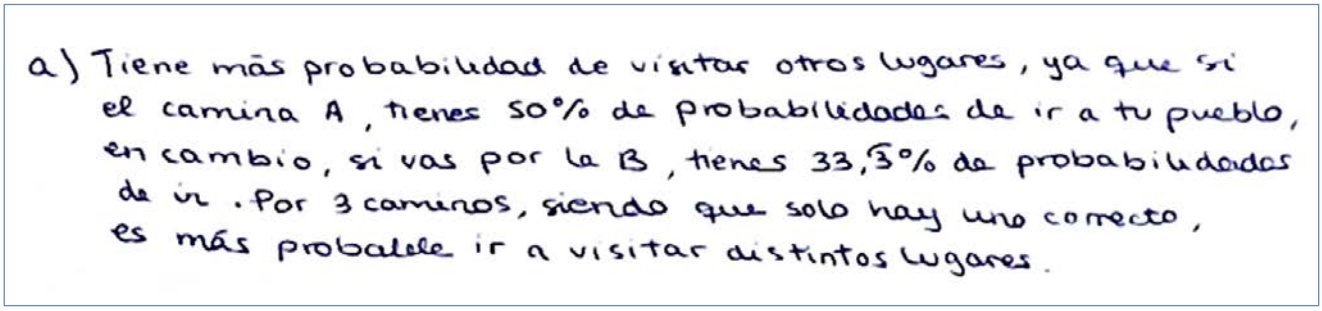

a) Tiene más probabilidad de visitar otros lugares, ya que si el camina A, tienes 50% de probabilidades de ir a tu pueblo, en cambio, si vas por la B, tienes 33,3̄% de probabilidades de ir. Por 3 caminos, siendo que solo hay uno correcto, es más probable ir a visitar distintos lugares.

Figura 4. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta la probabilidad total y sin usar representaciones diagramáticas

Siguiendo un razonamiento similar, son destacables las producciones que han realizado ciertos participantes (figura 5) con errores en la argumentación final al determinar quién tiene mayor probabilidad.

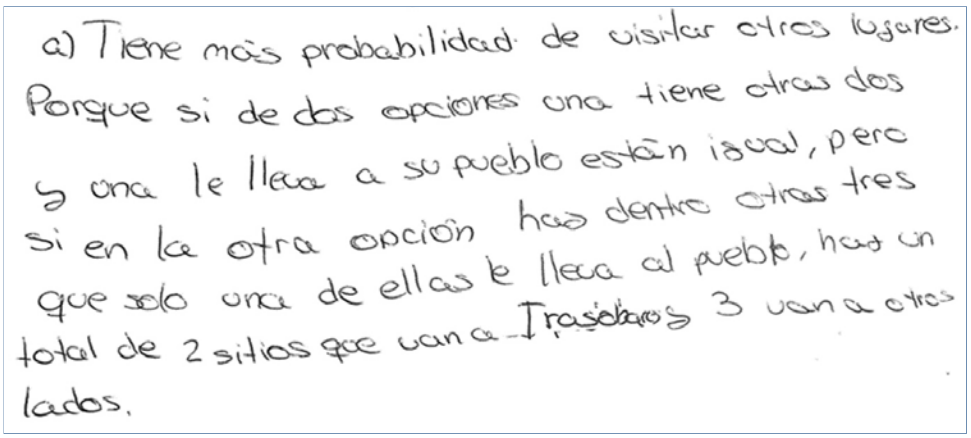

a) Tiene más probabilidad de visitar otros lugares. Porque si de dos opciones una tiene otras dos y una le lleva a su pueblo están igual, pero si en la otra opción has dentro otras tres que solo una de ellas le lleva al pueblo, has un total de 2 sitios que van a Trasobares y 3 van a otros lados.

Figura 5. Estrategia del apartado a) sin tener en cuenta las probabilidades con error de argumentación (términos absolutos)

En estos casos, el resolutor hace alusión en términos absolutos a los caminos que nos llevan a cada lugar (2 carreteras nos llevan a Trasobares y 3 carreteras a otros lugares) estableciendo una equiprobabilidad inexistente en las cinco posibilidades.

El resolutor podría haber seguido un razonamiento verbal comparando en términos absolutos las posibilidades con un razonamiento intuitivo. Teniendo en cuenta a la hora de elegir las carreteras el número de posibilidades estableciendo una proporción, es decir, en términos probabilísticos, la existencia de equiprobabilidad en la elección de las determinadas carreteras en cada intersección ($p(A)=p(B)=1/2$, $p(A1\,|\,A)=p(A2\,|\,A)=1/2$, $p(B1\,|\,B)=p(B2\,|\,B)=$ $=p(B3\,|\,B)=1/3$) y sin necesidad de realizar ningún cálculo posterior, podemos determinar que tiene mayor probabilidad de haber llegado a otros lugares. Puesto que en la primera intersección nos encontramos con dos opciones (uno a uno, $1/1=1$), podemos concluir que ambas tienen la misma probabilidad. Ahora, de las dos opciones que podemos elegir yendo por A, una nos lleva a Trasobares y la otra a otros lugares (uno a uno, $1/1=1$) lo que nos hace concluir que ambas tienen igual probabilidad. Mientras, de las tres opciones que podemos elegir yendo por B: una lleva a Trasobares y las otras dos nos llevan a otros lugares (una a dos, $1/2<1$) lo que nos hace concluir que tiene mayor probabilidad otros lugares yendo por B. De esta manera podemos argumentar que tiene mayor probabilidad ir a otros lugares.

La tabla 1 muestra el número de participantes que utilizaron para resolver la primera parte del problema cada una de las diferentes estrategias mencionadas.

Estrategia utilizada apartado a)	*Número de participantes*
Calculando la probabilidad total con árbol	47
Calculando la probabilidad total sin árbol	8
Calculando las probabilidades condicionadas con árbol	14
Calculando las probabilidades condicionadas sin árbol	19

Tabla 1. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en el apartado a)

Estrategias en las respuestas correctas de los participantes a la segunda cuestión

El enunciado del apartado b) planteaba la siguiente cuestión:

> Finalmente llegamos a Trasobares. Una vez allí, nos encontramos a mis primos y les explicamos lo sucedido. Entonces, mi padre riendo les dijo: «si acertáis por qué carretera nacional hemos venido os invitamos a comer», ¿qué carretera nacional tuvo más probabilidad de haber sido elegida, la A o la B? ¿Por qué?

En este sentido, considerando para su resolución la probabilidad total y el teorema de Bayes usando un significado clásico vamos a calcular las probabilidades a posteriori:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares})=\frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\qquad \simeq\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}4}=\frac{0{,}25}{0{,}4}=0{,}625=62{,}5\%.$$

$$p(B\,|\,\text{Trasobares})=\frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5};\qquad \simeq\frac{0{,}3\cdot 0{,}5}{0{,}4}=\frac{0{,}15}{0{,}4}=0{,}375=37{,}5\%.$$

Comparando ambas probabilidades concluimos que tiene más probabilidad de llegar al pueblo si finalmente hemos ido por la nacional A.

No es de extrañar, puesto que esta teoría pertenece a niveles superiores del currículo de segundo de secundaria, que ningún participante de la olimpiada, desarrollara su resolución utilizando dicho teorema. Sin embargo, muchos de ellos han dado soluciones de forma intuitiva cuya argumentación teórica se fundamenta en dicha teoría al asumir la equiprobabilidad y comparar probabilidades.

Veamos ahora las respuestas dadas por el alumnado participante:

Razonamiento probabilístico comparando las probabilidades condicionadas con un significado clásico

Considerando la equiprobabilidad de elegir las determinadas carreteras en las intersecciones y comparando las probabilidades condicionales a priori (llegar a Trasobares una vez elegida la carretera nacional A y llegar a Trasobares una vez elegida la carretera nacional B) se puede argumentar la solución, puesto que las probabilidades a posteriori que nos piden comparar vienen dadas por las expresiones:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})} \qquad \text{y} \qquad p(B\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})}.$$

Luego compararemos $p(A1\,|\,A) = 1/2 = 0{,}5 = 50\,\%$ y $p(B3\,|\,B) = 1/3 \approx 0{,}3 = 30\,\%$ ya que $p(A) = p(B) = 1/2$ (asumiendo la equiprobabilidad cuando elegimos la carretera A o B).

En este sentido, han sido cinco los estudiantes los que han usado una estrategia similar para dar solución al problema (figura 6).

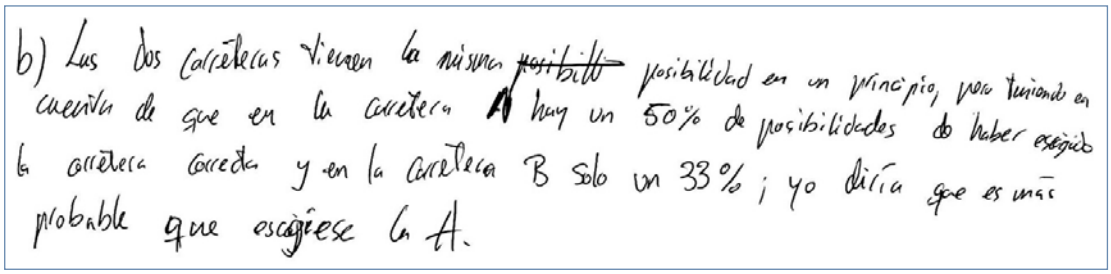

b) Las dos carreteras tienen la misma ~~posibili~~ posibilidad en un principio, pero teniendo en cuenta de que en la carretera A hay un 50% de posibilidades de haber escogido la carretera correcta y en la carretera B solo un 33%; yo diría que es más probable que escogiese la A.

Figura 6. Estrategia del apartado b) sin tener en cuenta la equiprobabilidad y las probabilidades condicionadas

Razonamiento probabilístico comparando las probabilidades conjuntas con un significado clásico

En esta ocasión tenemos:

$$p(A\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(A1\,|\,A)\cdot p(A)}{p(\text{Trasobares})} = \frac{p(A\cap A1)}{p(\text{Trasobares})}.$$

$$p(B\,|\,\text{Trasobares}) = \frac{p(B3\,|\,B)\cdot p(B)}{p(\text{Trasobares})} = \frac{p(B\cap B3)}{p(\text{Trasobares})}.$$

Luego comparando las probabilidades conjuntas: $p(A\cap A1)$ y $p(B3\cap B)$ daremos la respuesta correcta.

En este caso, el número de alumnos que han resuelto el apartado b) de forma similar es de diecisiete (figura 7).

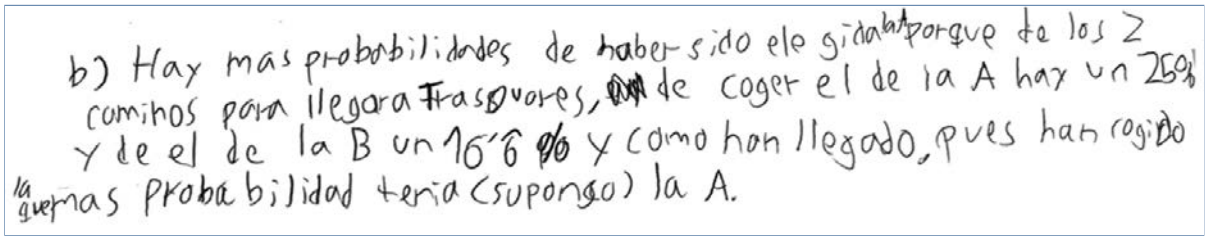

b) Hay mas probabilidades de haber sido elegida porque de los 2 caminos para llegar a Trasobares, de coger el de la A hay un 25% y de el de la B un 16'6 % y como han llegado, pues han rogido la que mas probabilidad tenia (supongo) la A.

Figura 7. Estrategia del apartado b) teniendo en cuenta las probabilidades conjuntas

En la misma línea de argumentación, se podría hacer una razonamiento verbal sin usar las probabilidades, comparando en términos absolutos las posibilidades con un significado más intuitivo. En ese aspecto, teniendo en

cuenta a la hora de elegir las carreteras el número de posibilidades estableciendo una proporción, es decir, en términos probabilísticos, la existencia de equiprobabilidad en la elección de las determinadas carreteras en cada intersección y sin necesidad de realizar ningún cálculo posterior, podemos determinar que tiene mayor probabilidad de haber sido elegida la opción *A*. Ya que, de las dos opciones que podemos elegir yendo por *A*: una nos lleva a Trasobares y la otra a otros lugares. Mientras que de las tres opciones que podemos elegir yendo por *B*: una lleva a Trasobares y las otras dos nos llevan a otros lugares.

En la tabla 2 se identifica el número de participantes que concluyeron el apartado b) del problema argumentando sus soluciones con las estrategias mencionadas.

Estrategia utilizada apartado b)	*Número de participantes*
Calculando las probabilidades condicionadas y equiprobabilidad en los sucesos	5
Calculando las probabilidades conjuntas	17

Tabla 2. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en el apartado b)

Conclusiones

Muchos estudiantes de 2.º ESO son capaces de resolver alguno de los apartados (tablas 1 y 2). Esto sucede a pesar de que muchos de ellos no han sido instruidos sobre las técnicas específicas para resolver problemas de probabilidad condicionada, que aparecerán curricularmente en 3.º o 4.º ESO (probabilidad condicionada, probabilidad total, Bayes…) y que convierten este problema en un ejercicio (Blanco y Pino, 2015).

En el análisis aparecen variadas respuestas que denotan distintos razonamientos o modos de abordar la situación, más allá de aplicar la resolución «escolar» de la tarea. La argumentación matemática subyacente en estas justificaciones es rica y provechosa, puesto que aborda la resolución de los apartados articulando diferentes objetos matemáticos (proposiciones, lenguajes, propiedades y representaciones) referidos a la probabilidad.

Creemos que el enunciado de la tarea promueve la aparición de distintos razonamientos y modos de abordar el problema ya que, por un lado, los datos permiten que se pueda abordar la situación de manera sencilla (dos ramas y tres ramas, equiprobabilidad en cada rama…) con herramientas elementales y, sobre todo, porque la exigencia del problema no está en calcular una probabilidad concreta de un suceso sino en tomar una decisión razonada sobre qué suceso es más probable.

Por otro lado, tras la revisión y detección de las estrategias correctas, queda claro que en las situaciones de aprendizaje sobre la probabilidad condicionada que se puedan plantear en 4.º ESO o en 1.º de Bachillerato, sería necesario incluir tareas específicas del tipo en las que la suma de los caminos en términos absolutos contraríen el análisis anterior de las probabilidades condicionadas puesto que es una estrategia no correcta que emerge de manera natural en las respuestas de estudiantes de 2.º de ESO. Por ejemplo, una vez afrontada la tarea propuesta en la olimpiada, plantear otra similar, pero con dos nacionales *A* y *B*, con *A*: 2 al pueblo y 1 a otros lugares, *B*: 2 al pueblo y 3 a otros lugares.

Por último, entendemos que es importante plantear una tarea como la estudiada también en 2.º y 3.º ESO para el desarrollo de los saberes estocásticos en la docencia habitual en clase. Precisamos que cuando promovemos su uso de forma habitual en el aula, no lo hacemos con la finalidad de instruir a los estudiantes en las técnicas de resolución de las mismas para que estas tareas sean resueltas cual ejercicio y así ganar una competición matemática extraescolar como la olimpiada. Ni siquiera con una posible finalidad de aprovechar y adelantar la introducción de dichas técnicas antes de lo que dice el currículo. Más bien, nuestra recomendación va dirigida a que los estudiantes se acostumbren a abordar la resolución de ese tipo de situaciones de probabilidad condicionada (más complejas) poniendo en juego su razonamiento probabilístico y las técnicas más elementales que disponen hasta el momento. Además, entendemos que estas tareas con distintas aproximaciones sirven para atender a la diversidad que nos podemos encontrar en el aula amparando todas las casuísticas reconocidas.

Finalmente, animamos a que, a través de su implementación en el aula, el profesorado fomente la participación de su alumnado en esta actividad, la olimpiada matemática de segundo, no con un propósito competitivo, sino para ofrecerles una experiencia matemática agradable fuera del contexto habitual, que permita al alumnado mejorar las actitudes hacia la matemática y adquirir creencias positivas hacia la misma.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/50110001103, con apoyo del grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2014), «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer.

Blanco L. J., y J. Pino (2015), «¿Qué entendemos por problema de matemáticas?», en: L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*, Universidad de Extremadura, 81-92.

Borovcnick, M. (2012), «Multiple perspectives on the concept of conditional probability», *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5–27.

Goñi, M. (2022), «XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO», *Entorno Abierto*, 47, 1–5.

Rubio-Chueca, J. M., J. M. Muñoz-Escolano y P. Beltrán-Pellicer (2021), «La probabilidad en problemas de Olimpiadas matemáticas de secundaria en España», *Contextos Educativos*, 28, 29-50.

Felipe Medrano y sus cuadrados mágicos

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Desde un punto de vista matemático, un cuadrado mágico consiste simplemente en una matriz cuadrada, cuyas entradas son enteros positivos, de forma que al sumar los elementos de cada fila, columna y diagonal se obtiene siempre el mismo valor.

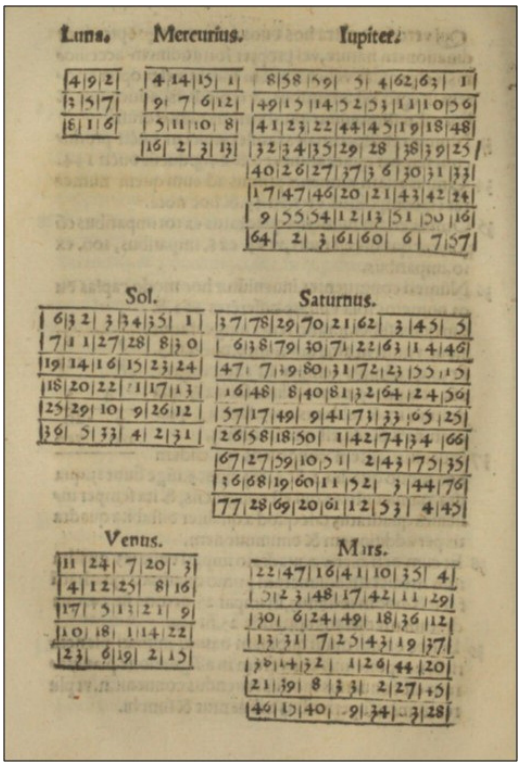
Estos objetos recibieron atención ya desde épocas muy antiguas. La relativa dificultad de su construcción les otorgaba un aura de misterio y hacía que fueran considerados objetos con un cierto carácter místico, cercanos al ocultismo, y con propiedades mágicas. Hay que tener en cuenta que, en la antigüedad, las propias matemáticas formaban un cuerpo de conocimiento cerrado y accesible solo a unos pocos iniciados. Los pitagóricos, por ejemplo, pueden verse como una secta desde el punto de vista filosófico o religioso en la que las matemáticas no jugaban un papel científico, sino que organizaban y sistematizaban toda su cosmología y su sistema de creencias.

Según algunas fuentes, el origen de los cuadrados mágicos estaría en la India. De hecho, parece ser que en algunos tratados antiguos se utiliza vocabulario proveniente del ajedrez para describir el modo en que los números se desplazan en la matriz durante el proceso de construcción. En la figura adjunta podemos ver un cuadrado mágico grabado en los muros del templo jainita de Parshvanatha, construido en el siglo X en Khajuraho. Resulta interesante ver la grafía primigenia de las cifras y comprobar las diferencias y similitudes con su forma actual.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Al margen de su origen remoto, el tratamiento relativamente sistemático de los cuadrados mágicos se inició en el mundo árabe medieval. Por ejemplo, aparecen cuadrados mágicos en un importante texto de los siglos X-XI originario de Basora denominado *Enciclopedia de los hermanos de la pureza*. Este texto abordaba contenidos científicos (matemáticas, música, astronomía, etc.) pero también filosóficos y religiosos. Frecuentemente se considera que contiene elementos esotéricos, por lo que no resulta sorprendente la presencia de cuadrados mágicos. Este texto, por cierto, se difundió de forma bastante temprana en la taifa de Zaragoza, influyendo notablemente en el pensamiento filosófico de Avempace.

No solo los matemáticos de la India o los árabes prestaron atención a estos objetos. Existen también ejemplos de su presencia en textos chinos y japoneses. Posteriormente, como en muchos otros casos, la Europa medieval y renacentista recogió, asimiló y reelaboró estas ideas. Es muy conocido, por ejemplo, el cuadrado mágico que aparece en el grabado *Melancolía I* (1514) de Alberto Durero.



Luca Pacioli, a caballo entre los siglos XV y XVI, habla de cuadrados mágicos en un manuscrito titulado *De viribus quantitatis*, en el que se presentan juegos, acertijos y rompecabezas matemáticos; y que se considera como el primer texto que describe un juego de magia con cartas. Gerolamo Cardano en su *Practica arithmetice et mensurandi singularis* (1539) recoge cuadrados mágicos de distintos tamaños (el más grande de tamaño 9 × 9) en un contexto astrológico (puede apreciarse en la figura adjunta).

Más de dos siglos después de los ejemplos anteriores, en 1744, se publicó en Madrid un tratado relativamente breve (no llega a las 50 páginas de texto) titulado *Quadrados mágicos, que sobre los que figuraban los egipcios, y pythagoricos, para la superticiosa adoracion de sus falsos dioses ha adelantado el prolijo estudio de don Phelipe Medrano, cavallero del orden de Santiago*. La obra va dedicada a la entonces reina, Isabel de Farnesio, y lleva la aprobación de Diego de Torres y Villarroel. Diego de Torres era en ese momento catedrático de matemáticas en la Universidad de Salamanca, pero era mucho más conocido como autor de almanaques y pronósticos que publicaba bajo el pseudónimo de «El gran Piscator de Salamanca». Posiblemente exista relación entre su afición a las profecías y adivinaciones y sus elogiosas palabras hacia una obra centrada en tan mágico objeto:

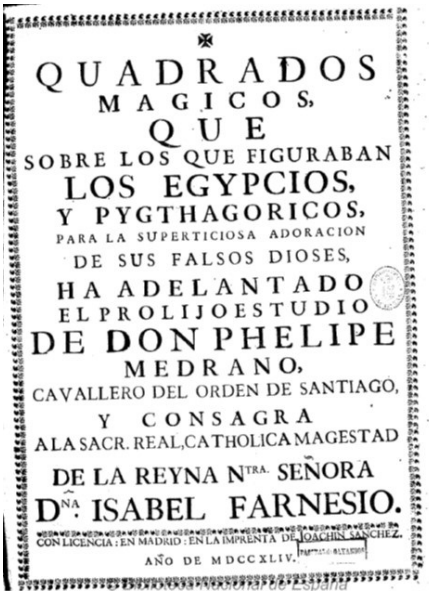
> La obra es muy digna de ser celebrada y el autor merece no solo el aplauso, los elogios y las estimaciones, sino también muchas gracias.

Tras la dedicatoria, las aprobaciones y los poemas de elogio al autor, el libro de Medrano comienza con un prólogo de tres páginas que se inicia de un modo muy ilustrativo:

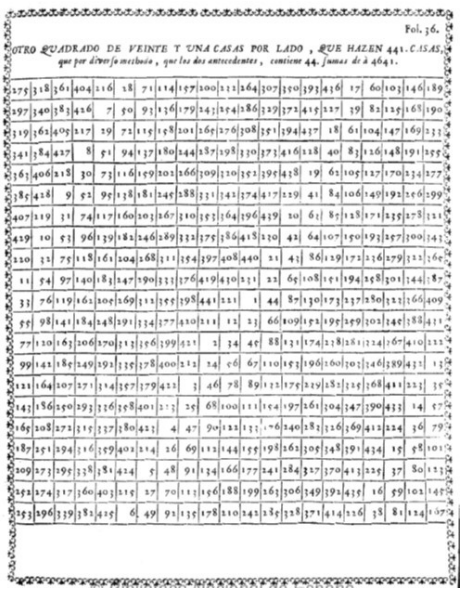
> Halleme en conversación en que un caballero amigo mío, tomando nueve naipes, formó un cuadrado de tres casas por lado, con las circunstancias que para su bondad se requieren, causó a diversos circunstantes admiración.

Es de entender en estas palabras que el caballero amigo formó un cuadrado mágico con las nueve cartas y que dicho cuadrado sorprendió a los asistentes. Medrano entonces relata que se embarcó en el empeño de ser capaz de construir dichos objetos de forma sistemática. En el relato que hace hay otro interesante fragmento:

> Atribuían al sumo hacedor el cuadrado de una casa […] a Saturno el de tres, a Júpiter el de cuatro, a Marte el de cinco, […] y a la Luna el de nueve.


QUADRADOS MAGICOS, QUE SOBRE LOS QUE FIGURABAN LOS EGYPCIOS, Y PYGTHAGORICOS, PARA LA SUPERTICIOSA ADORACION DE SUS FALSOS DIOSES, HA ADELANTADO EL PROLIJO ESTUDIO DE DON PHELIPE MEDRANO, CAVALLERO DEL ORDEN DE SANTIAGO, Y CONSAGRA A LA SACR. REAL, CATHOLICA MAGESTAD DE LA REYNA N.TRA. SEÑORA D.NA ISABEL FARNESIO.

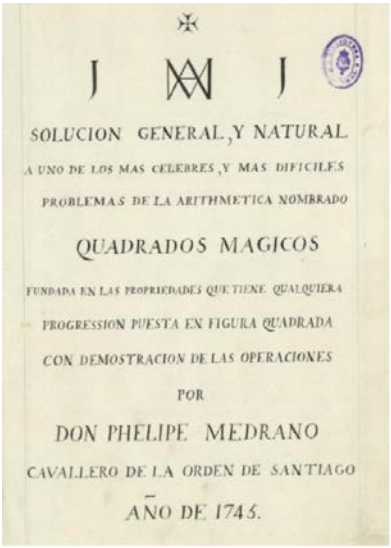
CON LICENCIA: EN MADRID: EN LA IMPRENTA DE JOACHIN SANCHEZ. AÑO DE MDCCXLIV.



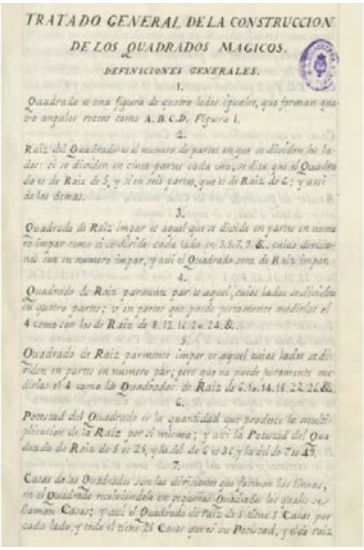
Estos dos pequeños fragmentos resultan interesantes porque hacen mención a los juegos de cartas y la astrología y los planetas (o dioses). Estos dos elementos nos llevan, respectivamente a las obras de Pacioli y Cardano que hemos comentado antes, si bien no es posible saber si Medrano tenía algún tipo de conocimiento de las mismas. Además, si se compara la descripción del autor con los cuadrados mostrados por Cardano, vemos que los tamaños difieren.

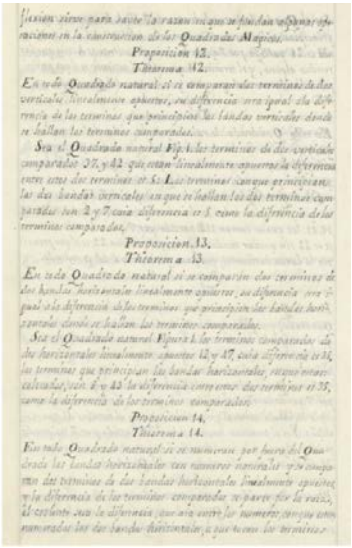
Sea como sea, tras el prólogo, la obra consiste meramente en una sucesión de 42 folios en los que se muestran cuadrados mágicos de diversos tamaños, desde 3×3, hasta 32×32. Desafortunadamente, no se da ni una sola pista o indicación sobre el procedimiento seguido para construirlos. De hecho, los tres últimos cuadrados presentados, de tamaño 32×32, se proponen inicialmente como problema. Se presenta el cuadrado casi vacío, como en un moderno sudoku, solo con unas pocas casillas conocidas y se pide completarlo. En los tres casos Medrano da la solución en el folio siguiente.

Para resolver el misterio habría que esperar un año. En 1745, el mismo Phelipe Medrano compuso un manuscrito titulado *Solucion general, y natural a uno de los mas celebres, y mas dificiles problemas de la Arithmetica nombrado quadrados mágicos fundada en las propiedades que tiene qualquiera progression puesta en figura quadrada con demostracion de las operaciones*. Esta obra es considerablemente más extensa que la anterior, supera holgadamente las 200 páginas de texto y tablas, y tiene un carácter mucho más matemático, tal y como su título ya da a entender. Quizás esta circunstancia explique, en parte, por qué este manuscrito jamás, hasta donde sabemos, llegase a ver la imprenta.


J M J

SOLUCION GENERAL, Y NATURAL
A UNO DE LOS MAS CELEBRES, Y MAS DIFICILES
PROBLEMAS DE LA ARITHMETICA NOMBRADO
QUADRADOS MAGICOS
FUNDADA EN LAS PROPIEDADES QUE TIENE QUALQUIERA
PROGRESSION PUESTA EN FIGURA QUADRADA
CON DEMOSTRACION DE LAS OPERACIONES
POR
DON PHELIPE MEDRANO
CAVALLERO DE LA ORDEN DE SANTIAGO
AÑO DE 1745.


TRATADO GENERAL DE LA CONSTRUCCION
DE LOS QUADRADOS MAGICOS.
DEFINICIONES GENERALES.



De hecho, tal y como podemos apreciar en la imagen, el discurso tiene una clara organización euclidea. Se comienza con un listado de definiciones generales como:

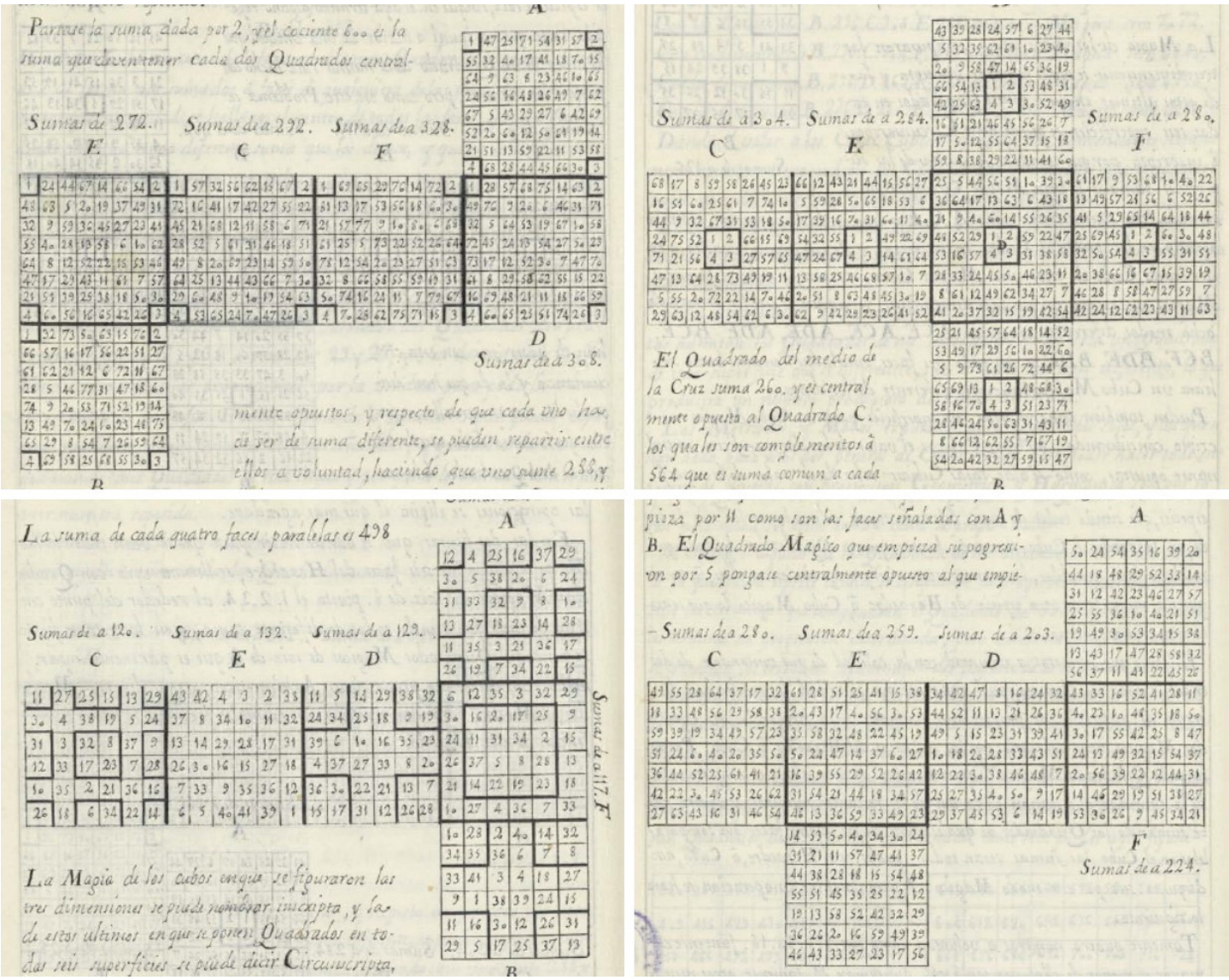
> Progression es un continuacion de quantidades que guardan entre ellas alguna suerte de semejanza, y cada una de estas quatidades se llama Termino.

A estas definiciones les sigue un listado de 46 teoremas con sus demostraciones. La primera proposición que se demuestra, por ejemplo, es:

> En toda Progression Arithmetica la suma de los dos terminos extremos es igual a la suma de qualquier dos terminos equidistantes de los extremos.

Tras el listado de teoremas, el autor pasa a describir y justificar con todo detalle, una serie de métodos para construir cuadrados mágicos. Los métodos presentados se organizan según la paridad del tamaño del cuadrado. Así, Medrano da dos métodos para el caso impar, tres métodos para el caso múltiplo de cuatro y dos métodos para el caso restante.

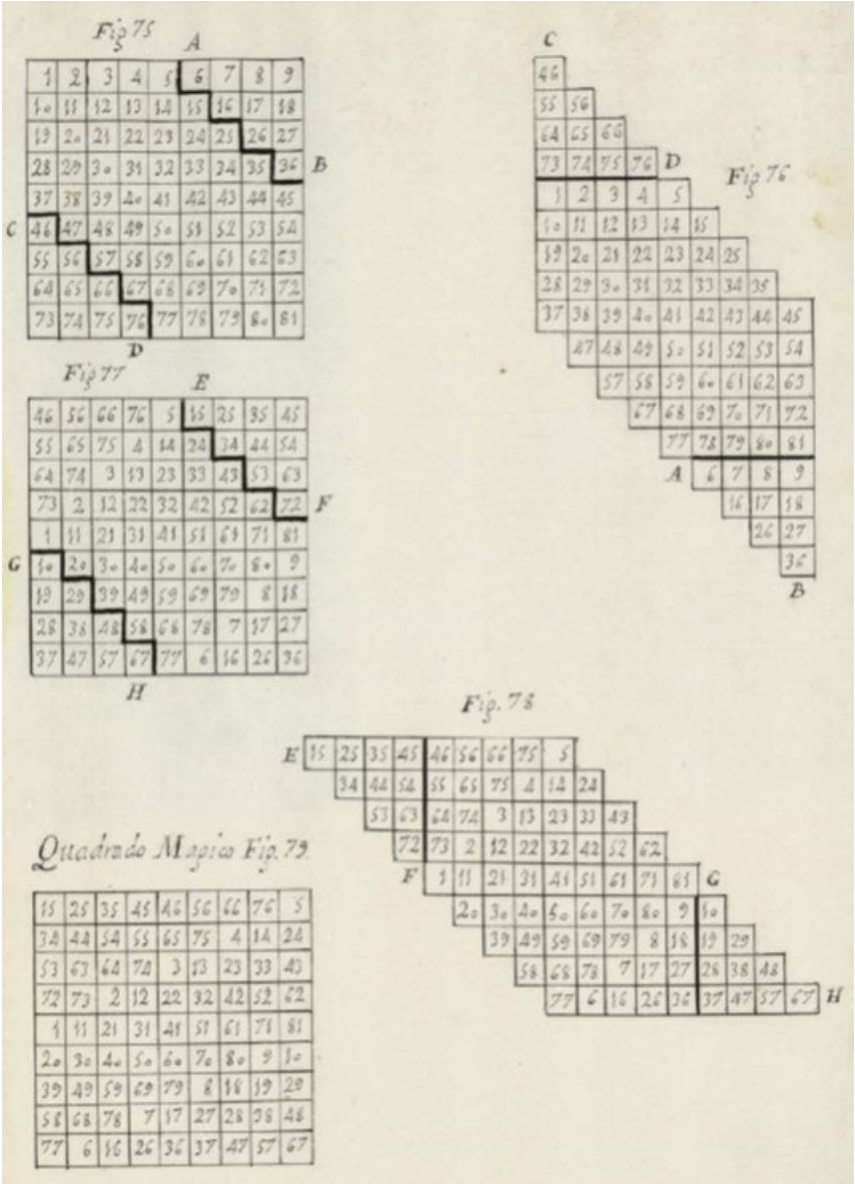
La parte final de la obra, antes de presentar una serie de tablas, figuras y un extenso catálogo de ejemplos, Medrano dedica 32 páginas a hablar de cubos mágicos. Es interesante observar, tal y como se aprecia en la figura, la variedad de desarrollos planos del cubo utilizada por el autor en sus descripciones.



Evidentemente, resultaría demasiado extenso entrar a describir aquí todos los distintos métodos y procedimientos de Medrano. Nos vamos a conformar con presentar el primero y más sencillo que da el autor. Se trata de un método para construir cuadrados mágicos de tamaño impar. El autor lo ejemplifica con un cuadrado de lado 9. El texto original utiliza la terminología presentada en las definiciones y hace referencia a las proposiciones demostradas. Nosotros omitimos dichas referencias y confiamos en que la terminología es razonablemente fácil de comprender con ayuda de las figuras correspondientes que se incluyen (hemos modernizado y simplificado el discurso, siendo las figuras a las que se refiere las que aparecen en la imagen de la página siguiente):

> Para hacer cualquier cuadrado mágico de lado impar, fórmese un cuadrado natural como el de la Figura 75. Háganse en él dos segmentos triangulares equiláteros, los cuales están ejecutados en el ángulo superior de la derecha y en el inferior de la izquierda. Muévase el triángulo *AB* abajo y *CD* arriba como están en la Figura 76, cópiense las nueve diagonales compuestas halladas y se tendrá un cuadrado como el de la Figura 77. Háganse otros dos segmentos triangulares equiláteros en el ángulo superior de la derecha y en el inferior de la izquierda, como son *EF* y *GH*. Muévase el triángulo *EF* a la izquierda y *GH* a la derecha como están en la Figura 78. Cópiese esta figura del modo que se quiera, ya sea poniendo las diagonales halladas por verticales o por horizontales y el cuadrado será mágico como el de la Figura 79.

Tal y como hemos comentado, el interés por los cuadrados mágicos no era algo meramente anecdótico. Además de algunos de los nombres mencionados, otras figuras importantes, como Pascal, escribieron sobre este tema. Aunque es difícil saber las fuentes de que disponía Medrano al abordar su trabajo, sí que tenemos constancia por una



carta de 1753 de que tenía conocimiento de un trabajo posterior titulado *Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra* publicado en 1750 por el francés Louis-Léon d'Ons-en-Bray en la Académie Royale des Sciences de París. No sucede lo mismo en el sentido contrario. El francés menciona diversos autores en su introducción y afirma que se centra solo en los casos pares, ya que sobre los casos impares ya existen muchos trabajos (no menciona a Medrano). Una comparativa rápida parece indicar que los métodos de Medrano son aparentemente diferentes de los de d'Ons-en-Bray. Desafortunadamente, no tenemos constancia de que Medrano continuara trabajando en este tema y los datos sobre su vida son escasos. En todo caso, estamos ante un ejemplo interesante, y hasta cierto punto paradigmático, del relativo aislamiento que la ciencia española sufrió, pese a poder hacer aportaciones interesantes, durante gran parte de la historia.

Al inicio dijimos que la dificultad en su construcción otorgaba a los cuadrados mágicos un carácter misterioso. Terminamos con las palabras del anónimo académico francés que evaluó el trabajo de d'Ons-en-Bray en las Mémoires de la citada academia:

> Si los antiguos matemáticos que otorgaron a estas configuraciones numéricas el nombre de mágicas hubieran conocido la extrema simplicidad a la que su construcción se puede reducir, seguramente se lo habrían retirado. Esos cuadrados, sin embargo, nunca habrían merecido ese apelativo con mayor razón: la verdadera magia de las matemáticas consiste en abordar las cosas más sorprendentes mediante los métodos más simples.

Formas geométricas básicas planas

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Los niños inician su contacto con la geometría mucho antes de llegar a la escuela. La primera aproximación es la comprensión del espacio donde viven, que se desarrolla mediante la interacción cotidiana con el entorno (Muñoz-Catalán, 2018). El contacto permanente con objetos que tienen forma les lleva a extraer aspectos comunes que derivarán más adelante en la abstracción de los cuerpos geométricos y de las formas planas. Es importante, por tanto, experimentar en el aula con diferentes contextos y materiales que pongan de relevancia semejanzas y diferencias y les permitan avanzar en dicha abstracción.

Puesto que las formas planas son figuras de dos dimensiones, frente a los cuerpos geométricos que tienen tres, podríamos pensar que es más sencillo comenzar el aprendizaje de las formas geométricas por las primeras. Sin embargo, las formas planas no tienen existencia real, salvo como partes integrantes de los cuerpos geométricos tridimensionales. Por ello, es interesante hacer hincapié en la necesidad de comenzar manipulando objetos reales cuya forma se asemeje a los cuerpos geométricos más sencillos (cilindro, prisma, cono, pirámide y esfera) e ir mostrando las figuras planas como parte de estos, de forma experimental.

Los *applets* que proponemos en este artículo entrarían en escena posteriormente a estas actividades manipulativas, ya que trabajan con las formas planas sobre una pizarra digital interactiva, superficie plana en la que no hay problema en abstraer el concepto de figura plana fuera de la tridimensionalidad. Es decir, se proponen para su uso cuando el alumnado ya comienza a reconocer las formas planas como elementos independientes de los cuerpos geométricos.

Una forma de organizar y planificar el aprendizaje de la geometría entre nuestros alumnos es utilizar el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Este modelo se puede aplicar al aprendizaje de cualquier concepto geométrico y resulta muy útil cuando abordamos las figuras planas. La evolución del alumnado dentro del aprendizaje se divide en cinco niveles, que ordenados del más elemental al más complejo son la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor (Vargas, 2013).

Dado que el alumnado que nos ocupa se encuentra en la etapa de Educación Infantil, su aprendizaje de las formas geométricas planas va a limitarse a los niveles 0 (visualización) y 1 (análisis), quedando los demás para posteriores cursos de Educación Primaria.

De un modo breve, podemos decir que el alumnado que se encuentra en el nivel 0 o de «visualización», reconoce las formas como un todo, pero no es capaz de distinguir elementos de las mismas. Por lo tanto, no puede deducir propiedades a partir de semejanzas entre distintas figuras, aunque sí reconoce que distintos objetos tienen la misma forma. Los que alcanzan el nivel 1 o de «análisis» sí son capaces de reconocer partes de las figuras y, por tanto, deducir propiedades a partir de semejanzas y diferencias. Pero les resulta muy complicado establecer clasificaciones entre familias de figuras basadas en dichas propiedades.

El modelo de Van Hiele propone una estructura de fases que permiten al alumnado avanzar dentro de un mismo nivel y pasar al siguiente. La primera es la fase de información, en la que el alumnado toma contacto con el elemento a estudiar. A continuación se plantea la fase de orientación dirigida, en la que se propone una actividad y el docente, con un papel de guía, va orientando al alumno en la resolución. Las actividades propuestas en este artículo, de carácter bastante abierto, facilitan este papel del profesor como conductor del aprendizaje. La siguiente fase es la de explicitación, en la que los alumnos ponen en común los puntos de vista y los resultados obtenidos.

En ella tiene especial relevancia el uso del lenguaje. La utilización de *applets* como los que se proponen más adelante, en gran grupo y con la pizarra interactiva sobre la que todos pueden opinar, son una herramienta muy útil en esta fase de explicitación. Las fases de orientación libre (resolución de problemas más complejos con los conocimientos adquiridos) e integración (relación de los conceptos nuevos con la red de conocimientos ya aprendidos con anterioridad) son más difíciles de abordar en Educación Infantil.

En este marco, con el presente artículo proponemos el uso de un conjunto de *applets* GeoGebra que facilitan el aprendizaje dentro de los niveles 0 y 1 de Van Hiele y centrándonos en las fases 1, 2 y 3 de dichos niveles.

Hemos agrupado estos *applets* en tres grupos, atendiendo al tipo de actividad que los niños deben realizar con las figuras. El primero incluye actividades en las que los niños trabajarán sobre las propiedades de las figuras. En las del segundo grupo deben dibujarlas, con mayor o menor ayuda. Y en el tercero tienen que seleccionar las que cumplen ciertos criterios, de entre un grupo de imágenes.

En este enlace puedes acceder al libro GeoGebra con todas las actividades.

Actividades sobre las propiedades de las figuras

¿Qué pondrías?

Esta actividad propone una cuadrícula de cuatro casillas, en tres de las cuales hay una figura dentro. Las posibles formas de la figura son triángulo, círculo y cuadrado, y aparecen a la derecha, en gris para no condicionar el color. Por su parte, los colores posibles son los básicos: rojo, amarillo, verde y azul, y aparecen abajo. El alumnado debe «rellenar» la casilla que falta haciendo clic sobre la forma y el color que considere adecuados. Para decidir cuál pone, debe hacer un análisis de las semejanzas y diferencias entre las propiedades (forma y color) de las figuras fijas que hay en la cuadrícula. Pinchando en el botón OTRO cambia la propuesta. La actividad no tiene confirmación de la corrección.

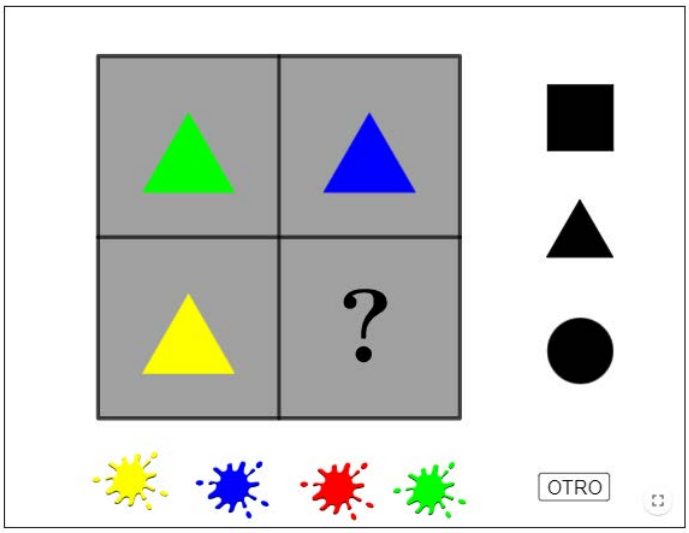
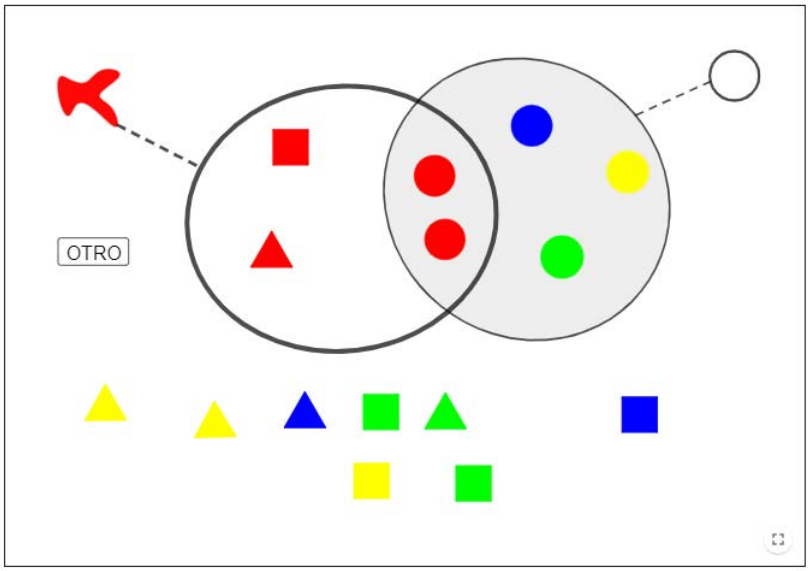


Diagrama de Venn

Los diagramas de Venn son herramientas que permiten decantar o clasificar elementos por sus propiedades de una forma muy sencilla (*Entorno Abierto*, n.º 45). En este caso se plantean dos: uno para la cualidad forma y otro para el color, contando con la zona de intersección para los elementos que compartan el atributo de ambas cualidades. Para usarla, basta con arrastrar los elementos que aparecen debajo de los diagramas y colocarlos dentro del diagrama que corresponda. Se vuelve a trabajar con tres formas básicas (triángulo, cuadrado y círculo) y con cuatro colores (rojo, amarillo, verde y azul). La actividad no es autocorregible.

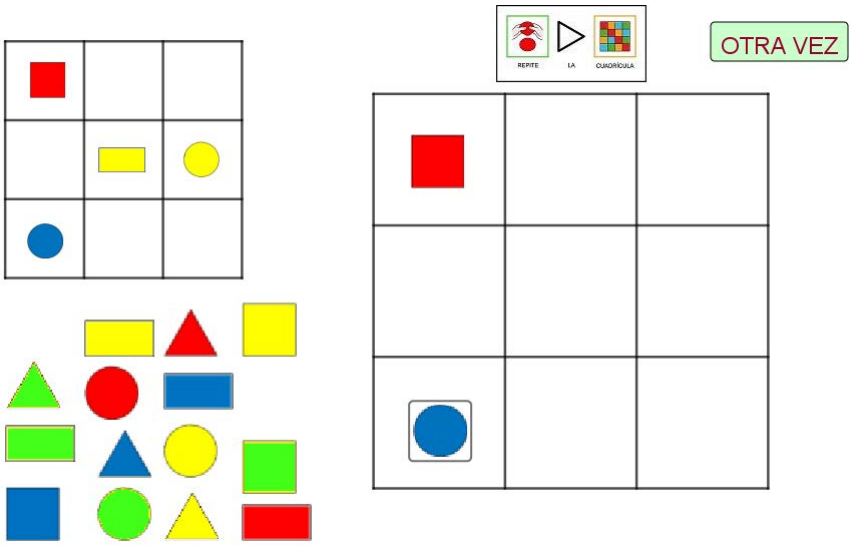


Al pinchar sobre el botón OTRO cambia la disposición de las figuras y los atributos de ambos diagramas.

Reproduce el modelo

En esta actividad se muestra una cuadrícula pequeña de 3×3 que nos servirá de modelo para reproducirla en la cuadrícula grande. En dicha cuadrícula aparecen aleatoriamente diferentes figuras geométricas (círculo, cuadrado, triangulo y rectángulo) con distintos colores (rojo, azul, verde y amarillo).

En la parte inferior de la cuadrícula modelo están todas las figuras geométricas en los distintos colores. El alumnado deberá elegir las figuras geométricas adecuadas y arrastrarlas a la cuadrícula grande para conseguir colocarlas en la misma posición que en la cuadrícula modelo.

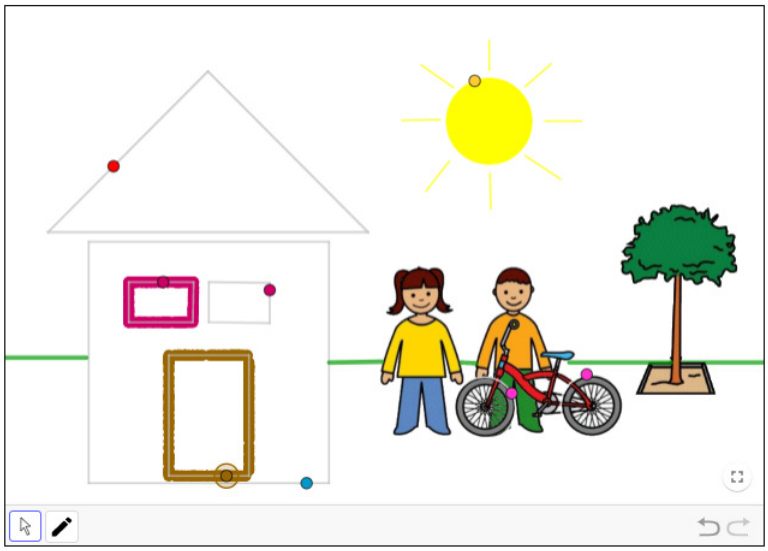


Al reiniciar la actividad, la cuadrícula que nos sirve de referencia cambia aleatoriamente.

Es interesante verbalizar los movimientos que deben de realizar para colocar los objetos, utilizando los términos «a un lado», «al otro lado», «arriba», «abajo»…, siempre que sea posible.

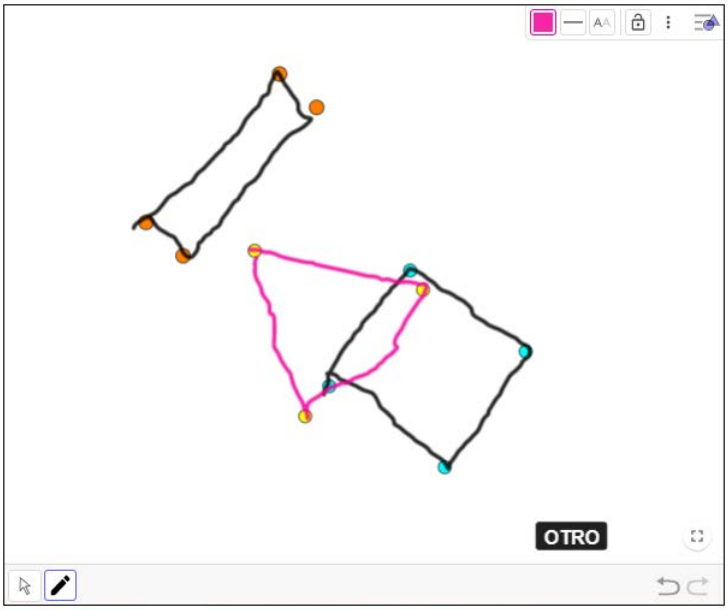
Actividades para reconocer y dibujar las figuras

Dibuja las formas



En esta actividad se propone el trazado de cuatro figuras básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo) de manera guiada. A partir del punto coloreado que aparece en cada una de las figuras, el alumno las dibuja de manera que es imposible salirse de la línea de la figura. Esta forma guiada de trabajar se propone para utilizarla de manera previa al trazado libre, ciertamente complicado para estas edades. El niño conoce y memoriza el recorrido del trazo. Además, a diferencia de otras actividades propuestas en esta selección que se desarrollan en entornos formales, aquí las figuras están vinculadas a

elementos cotidianos para el alumnado, ya que forman parte de una escena reconocible. La actividad es muy sencilla: solo hay que recorrer las figuras arrastrando el punto y entonces aparece el trazo. Si se refresca la página desaparecen los trazos y se puede comenzar de nuevo. No hay cambio de figuras ni autocorrección.



Dibuja los polígonos

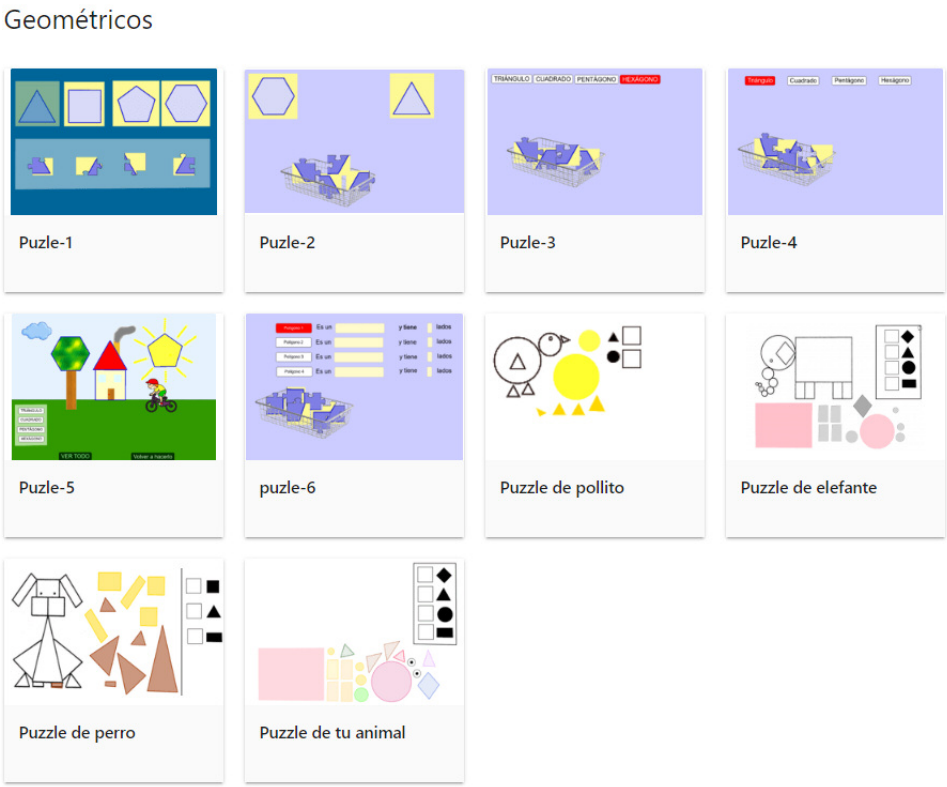
Se trata de dibujar tres figuras: cuadrado, rectángulo y triángulo, con el lápiz que ofrece la actividad. Para ello en la pantalla se muestran varios puntos coloreados en tres colores, de manera que uniendo los que son del mismo color se obtienen las figuras citadas. Los puntos cambian de posición y de color cada vez que se reinicia la actividad a través del botón OTRO.

Una vez dibujados partiendo de los vértices que señalan los puntos, se puede abrir la actividad a dibujar en las zonas que quedan libres de la pantalla esas mismas figuras en otras posiciones, u otras figuras con más vértices, o con otros colores que se pueden elegir en la barra de herramientas que aparece en la parte superior derecha.

Esta actividad presenta más dificultad que la anterior, ya que al no haber una guía sobre el trazo previo, los niños deben dibujar las figuras a mano alzada, con la única referencia de los vértices.

Puzles geométricos

En el artículo «Rompecabezas» incluido en el número 33 de marzo de 2020 de Entorno Abierto se comentaban las posibilidades de diferentes tipos de puzles. Una de las categorías en las que se clasificaban dentro del libro de



GeoGebra era la de geométricos. En ella se podía trabajar con dos tipos de actividades basadas en el reconocimiento y recuento de figuras geométricas básicas.

Actividades de selección de las figuras entre otros objetos

Selecciona formas (10). Selecciona color (10). Seleccionar forma y color (10)

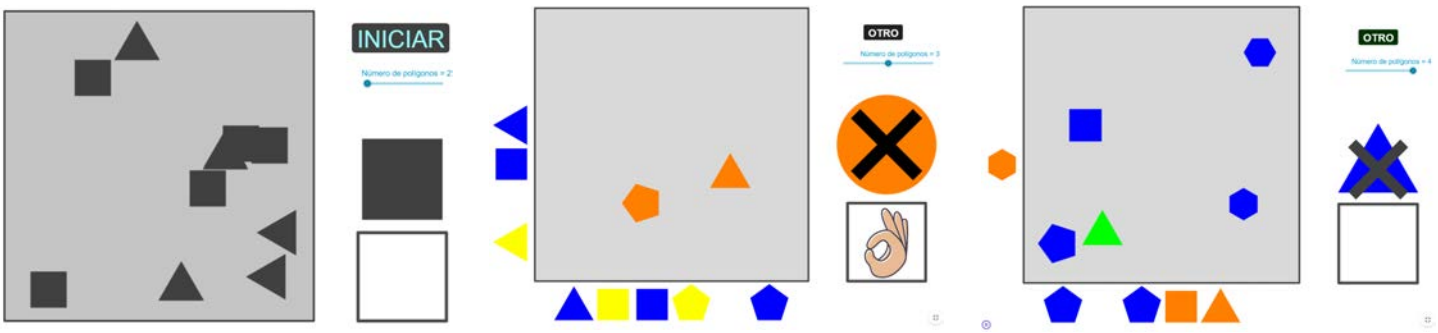
En este grupo de tres actividades de selección de objetos, la forma de las figuras se trabaja como una cualidad que puede tomar entre dos y cuatro atributos. Son actividades asimilables a clasificaciones por uno o dos criterios.

En ellas aparece un cuadro gris sobre el que se desplazan 10 polígonos con movimientos horizontales y verticales. Un deslizador ofrece la posibilidad de elegir el número de polígonos distintos que pueden aparecer: dos (triángulo y cuadrado), tres (triángulo, cuadrado y pentágono) o cuatro (añadiendo el hexágono). Una vez iniciada la actividad con el botón INICIAR, se pondrán en movimiento y a la derecha aparecerá el criterio con el que hay que realizar la selección de los elementos. Sobre el polígono de la derecha puede sobreponerse un aspa que indicará un criterio de negación del o de los atributos que aparezcan.

La selección de los polígonos que cumplen los criterios se hará clicando sobre los elementos oportunos. Si el elemento sobre el que se ha actuado cumple el requisito, desaparecerá del cuadro y se colocará en uno de los laterales (inferior o izquierdo). Cuando se hayan seleccionado todos los elementos que cumplen el criterio mostrado, la animación se detendrá y aparecerá en el cuadro de la parte derecha un icono de refuerzo positivo.

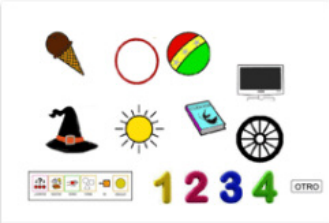
En este momento la actividad se abre a otras posibilidades: recuentos absolutos, recuentos por nuevos criterios tras la primera selección (forma, color, colocación en los laterales…), descomposición del número 10, etc.

En el *applet* *Selecciona la forma (10)* solo se trabaja la forma, el número de lados de los polígonos. En este caso todos los polígonos aparecen en gris para no confundir con el color). En *Selecciona el color (10)*, independientemente de la forma que tengan solo hay que seleccionar el color (para indicarlo aparece un círculo de color, para no confundir también con la forma). Y por último en *Selecciona forma y color (10)* los elementos seleccionados han de cumplir los dos criterios, forma y color. En este caso el polígono de la derecha aparecerá coloreado.

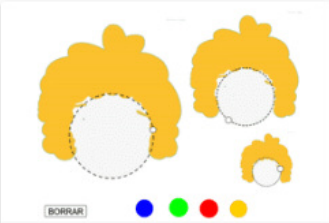


Si se quiere cambiar el número de polígonos distintos que aparecen en la actividad hay que realizar la selección antes de presionar el botón OTRO que da paso a una nueva situación.

Y por último, para cerrar esta colección de actividades en torno a las figuras geométricas planas básicas, en el libro dedicado al círculo se pueden encontrar propuestas de reconocimiento, dibujo y selección en torno a esta figura. Como ya resulta habitual en esta sección, todas las actividades son idóneas para trabajar con la pizarra digital interactiva. La realización de este tipo de actividades en gran grupo, es una ocasión para verbalizar el análisis de las propiedades, ensayar el trazado y afianzar el vocabulario referido a las formas básicas. Y el papel de guía del docente sigue siendo imprescindible para que se produzca correctamente el aprendizaje.

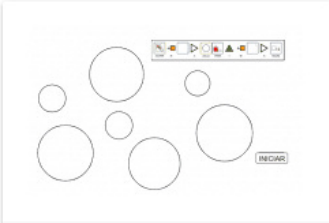


Identifica el círculo



Círculos de colores

Círculos de diferentes tamaños



Colorea los círculos grandes y pequeños

Como ya hemos comentado al principio, la iniciación a la geometría irá siempre de la mano de la experimentación y manipulación. Sin embargo, la posibilidad de trabajar paralelamente con herramientas como las que hemos presentado nos va a aportar como docentes información sobre el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos. Y a ellos, como alumnos, la posibilidad de compartir el aprendizaje con sus iguales.

Referencias bibliográficas

Muñoz-Catalán, M. C., y J. Carrillo (2018), *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación infantil*, Paraninfo Universidad.

Vargas, G., y R. Gamboa (2013), «El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría», *Uniciencia* 27(1), 74-94. Obtenido de <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944>.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Noviembre de 2022
ISSN: 2386-8821e