Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 50
Enero de 2023

El pasado 26 de noviembre, nos reunimos en Madrid para la Junta de Gobierno de la FESPM, representantes de las Sociedades que la conformamos. Allí acudí como presidenta de la SAPM. Pusimos en común todo lo realizado durante el curso y también los proyectos y líneas de trabajo futuras de cada Sociedad.

Con respecto al calendario de actividades de enero a junio de 2023, informamos que la SAPM lleva a cabo todos los cursos el programa educativo del Departamento de Educación Conexión Matemática, convocando el IV Concurso de Microrrelatos Matemáticos con una nueva modalidad de participación de relato corto.

También se organiza la JEMA, Jornada de Educación Matemática en Aragón, que va por su quinta edición y tendrá lugar los días 10 y 11 de marzo en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. El programa incluye las plenarias de Sergio Martínez-Juste, *El nuevo currículo aragonés: oportunidades para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* y de Clara Grima, *Enséñame a ganar,* así como ponencias y talleres orientados a los diferentes niveles educativos.

En abril tendremos las semifinales de las Olimpiadas alevín, de 2.º y de 4.º de ESO, cuyas finales se realizarán en el mes de mayo. En ese mismo mes celebraremos el Día Escolar de las Matemáticas, llevando a estas a la calle por todo Aragón, finalizando el programa de actividades poniendo el broche de oro en Teruel, desde donde surgió la iniciativa.

Nuestra Sociedad además colabora en proyectos con el Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA) y el Museo de Matemáticas. Y también lidera actividades de formación permanente como un grupo de trabajo sobre historia de las matemáticas y su aplicación en el aula.

Desde aquí, os animamos a todos los que habláis y sentís las matemáticas a que os asociéis, participéis y disfrutéis con nosotros del amplio abanico de actividades que os proponemos. Nos volveremos a encontrar por aquí en abril, ya que nuestra querida revista digital pasa a ser trimestral. Os animamos a mandar contribuciones para esta nueva etapa, así como a presentar comunicaciones a las JEMA.

Esther García Giménez
Presidenta de la SAPM

Σrio Interactivo

El rincón de Petrus

Volando voy (Graphing Bee): final de la XXX Olimpíada Matemática de 2.º ESO

Herramientas geométricas para un rey

Reconocimiento de formas

únete
a la SAPM
click

El rincón de Petrus

por
Pedro Latorre García
(CPEPA Gómez Lafuente, Zaragoza)

Hace mucho tiempo que mi florida prosa no mancilla estas páginas. Sin contar la breve crónica sobre el Torneo de Tangram, mi última aparición fue en noviembre de 2020. Quiero mencionar tres eventos acaecidos en este intervalo. El primero era casi inevitable. Se ha publicado un nuevo currículo. Desde mi posición como profesor de un Centro de Personas Adultas en una zona marginal, me sigue pareciendo pretencioso e inalcanzable para muchos de mis alumnos. Incluso aunque le apliquemos una extrema adaptación al contexto de nuestro entorno. El segundo hecho ha sido el cambio de periodicidad de este boletín. Mi ausencia no ha servido de acicate para que otras muchas plumas se animaran a escribir unas líneas y compartieran con nosotros sus valiosas experiencias. No obstante, creo sinceramente que un boletín trimestral cubre perfectamente las necesidades de difusión de las actividades de la SAPM. Por último, don Daniel Sierra ha dejado la presidencia de nuestra Sociedad. Desde aquí, quiero agradecerle el gran trabajo realizado. Sin exagerar un ápice, si no fuera por él no estaríais leyéndome (no sé si esto es bueno o malo, mejor aplicarlo al resto de artículos), porque casi seguro no habría EA. Por supuesto, darle el pésame a doña Esther García por tomar el relevo de Daniel.

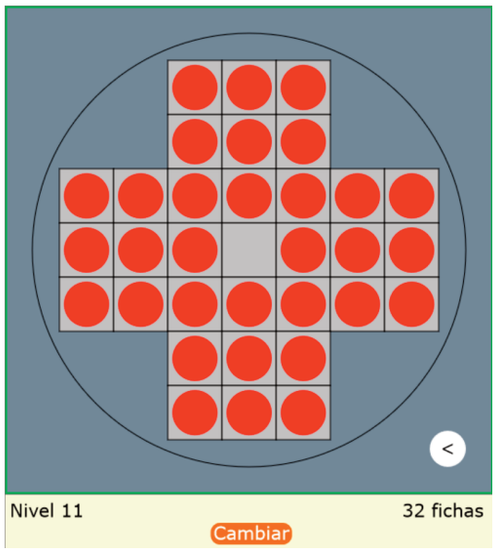
SAPM

El rincón de Petrus

En esta ocasión quiero presentar «El rincón de Petrus», una nueva sección de la web de la SAPM. En la misma voy a ir colgando algunas de las aplicaciones que he ido realizando estos últimos años. La mayoría son actualizaciones y otras son nuevas o no llegaron a estar publicadas en internet. Están desarrolladas en el lenguaje Javascript y los gráficos se dibujan en el Canvas, un componente de HTML5. Fueron diseñadas para funcionar en un PC con el navegador Mozilla Firefox, pero corren sin grandes errores en cualquier navegador. Les he añadido los eventos de toque para que funcionen en las tabletas.

Inauguramos la sección con dos de mis juegos favoritos. El primero es el *Solitario*. He actualizado la aplicación añadiendo más niveles, desarrollando los eventos táctiles y escribiendo un breve manual. El juego consiste en saltar con una pieza por encima de otra adyacente para ir a la siguiente casilla que debe estar vacía, eliminando la ficha sobre la cual se ha saltado. Los saltos se realizan en dirección horizontal o vertical. El objetivo es dejar en el tablero una sola pieza. Lo recomiendo para niños a partir de 6-8 años. Más información del *Solitario* en el número 29 de este boletín.

Quiero destacar que en el manual hay enlaces a dos recursos muy interesantes. Por un lado, el fotocopiable de un tablero del *Solitario*. Con él y unos botones o unas fichas de parchís se pueden practicar los niveles sin estar continuamente delante de la pantalla. También incluyo un sistema para resolver los niveles tradicionales en los cuales hay un solo hueco en el tablero. Consiste en dividir el tablero en varias zonas que se van resolviendo siguiendo el orden indicado. Cuando seguí este método me resultó muy gratificante. Es un buen ejemplo de estrategia del tipo «divide y vencerás».



La segunda aplicación es el juego *Luces*. Basada en el juego comercial *LightsOut*, es también un solitario. Cada nivel comienza con una serie de casillas encendidas y otras apagadas. Cuando aprietas sobre una encendida, se apaga, pero también cambia el estado de las casillas contiguas (las que están encima, debajo, a la izquierda y a la derecha). Hay 25 niveles. Los cinco primeros se pueden resolver en seis pasos, los cinco siguientes en siete, hasta llegar a los cinco últimos, los cuales requieren diez pulsaciones. Este juego requiere paciencia y no es sencillo encontrar un sistema para resolverlo. No he encontrado en internet ninguna estrategia, ni por supuesto he sido por mi cuenta capaz de descubrir alguna. Me falta por mirar ChatGPT, pero estos días está siempre lleno. Lo recomiendo para niños a partir de 8-10 años. Más información sobre *Luces* en el número 35.

Ambos juegos sirven para desarrollar el cálculo, en el sentido que se da en el ajedrez a este término: al hacer una jugada hay que tener en cuenta las siguientes. Es una habilidad poco trabajada habitualmente en clase de matemáticas y que según mi criterio es bueno practicar. Mi capacidad de cálculo se reduce a los primeros niveles del *Solitario* y al final de los niveles de *Luces*, cuando hay muy pocas casillas encendidas.

Si queréis animar a jugar a vuestros alumnos, cuando se terminan los juegos, la aplicación emite un certificado dando fe de que se han completado todos los niveles. Recompensad generosamente a aquellos que tengan la constancia de completar algún juego. Obviamente, yo no sería capaz. Para el próximo número espero haber subido al menos un par de aplicaciones.

Volando voy (Graphing Bee): final de la XXX Olimpíada Matemática de 2.º ESO

por
Pablo Beltrán-Pellicer y J. M.ª Muñoz-Escolano
(Universidad de Zaragoza)

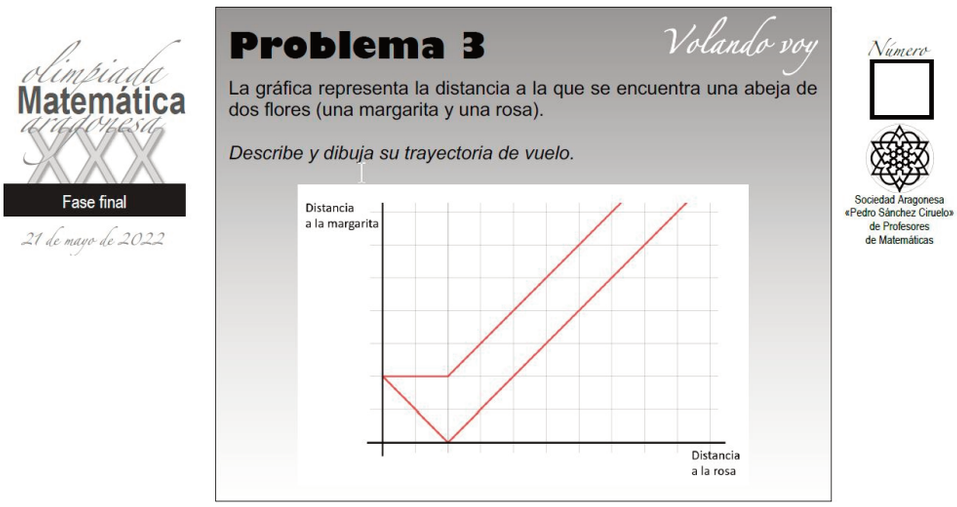


Figura 1. Enunciado del problema

Como puede apreciarse, el enunciado del tercer problema de la final de la XXX Olimpíada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO nos remite a la interpretación de gráficas. Sin embargo, no se trata de la gráfica de una función, aunque en torno a este problema puedan ponerse sobre la mesa cuestiones específicas de funciones.

Para los lectores no familiarizados con la Olimpíada, diremos que se trata una actividad para alumnado de 2.º curso de Educación Secundaria Obligatoria (mayoritariamente de 13-14 años), aunque también acuden algunos estudiantes de 1.º de ESO (Goñi, 2022). Por lo tanto, considerando el currículo de Matemáticas, presumiblemente, los participantes han tenido contacto con tareas en torno a la interpretación de gráficas, así como a aspectos relacionados con las funciones.

En un análisis a priori de la tarea que proponemos con este problema, identificaríamos distintos componentes: interpretación de los lugares geométricos que señalan los puntos donde la gráfica corta a los ejes y los diferentes segmentos: el que está sobre la bisectriz del cuadrante, el paralelo al eje de «distancia a la rosa», el que va desde un punto al otro de corte con los ejes y finalmente, el segmento paralelo a la bisectriz del primer cuadrante. Esto podría llevar a pensar que la tarea es muy compleja y que está alejada de lo que sabe hacer un alumno de 2.º de ESO. Los resultados obtenidos confirman esta hipótesis en gran medida, ya que únicamente tres participantes fueron capaces de resolverla de forma plenamente satisfactoria, aunque dicha hipótesis no se confirma de manera absoluta, puesto que muchos de los participantes identificaron correctamente varias de las componentes de este problema y apenas se registraron respuestas en blanco. Por lo tanto, con mayor o menor éxito, la mayoría de los participantes abordaron la resolución de esta tarea.

Ahora bien, ¿cuál es el origen de la dificultad? ¿Podría ser la forma en que se abordan normalmente estas cuestiones? Autores como Janvier (1998) o Leinhardt y otros (1990) señalan diversas dificultades en torno a funciones e interpretación de gráficas. Por ejemplo, que cuando se emplean contextos, suele ocurrir que se elige el tiempo como variable independiente, por lo que se crea la concepción de que una gráfica es una especie de crónica. Así mismo, materiales como los del Shell Centre (Swan, 1990) plantean actividades de interpretación en las que las variables se eligen de tal manera que exigen una mayor reflexión sobre los convenios de los ejes y sobre lo que significa tanto una gráfica, como una función como una relación entre dos magnitudes que varían. De hecho, incluyen relaciones no funcionales, como la del problema que nos ocupa, claramente inspirada en ellos.

Gran parte de los participantes (76 de 109) interpretan la gráfica del enunciado como el dibujo de la trayectoria de vuelo (figura 2), bien sea de manera parcial o completa, en lugar de como una gráfica que expresa la relación entre dos magnitudes que covarían.

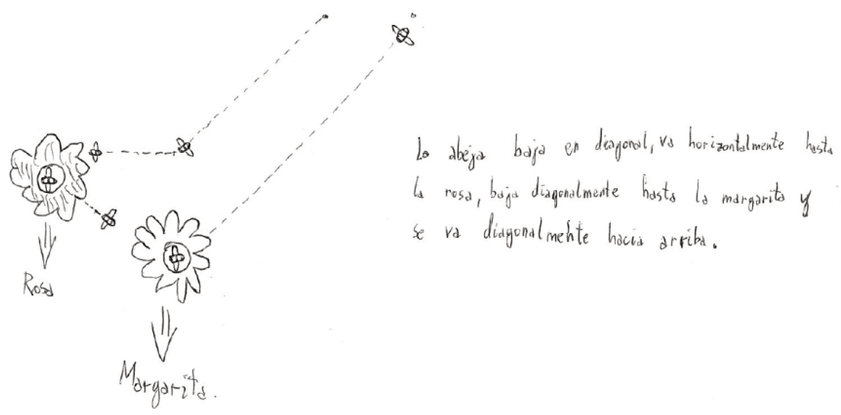


Figura 2. Interpretación de la gráfica como el dibujo de la trayectoria de vuelo

Luego nos encontramos con algunas resoluciones (3 de 109) que dan a entender que el participante se percata de que la gráfica indica la forma en que varían la distancia a la rosa y la distancia a la margarita, pero que no terminan de dar con la trayectoria. Por ejemplo, en la figura 3 observamos cómo se dice que hay un tramo paralelo al eje de abscisas y que esto significa que se mantiene la distancia a la margarita. Sin embargo, no lo relaciona con que la abeja estaría describiendo un arco de circunferencia.

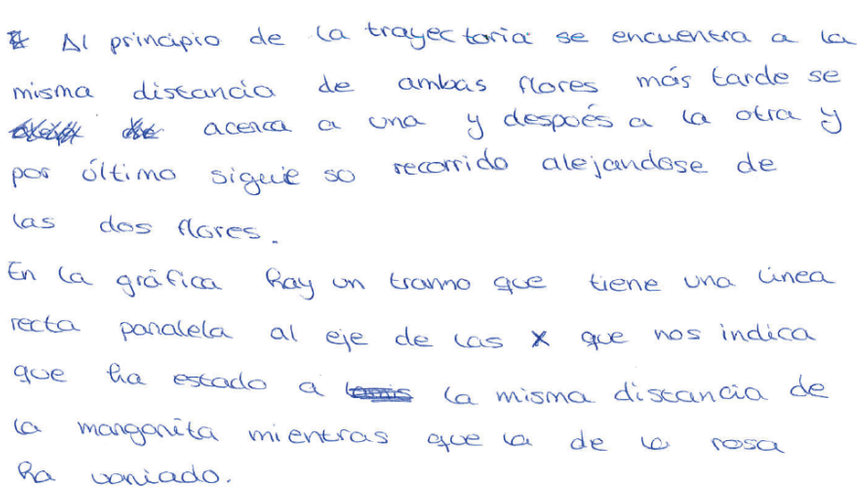

Al principio de la trayectoria se encuentra a la misma distancia de ambas flores más tarde se acerca a una y despoés a la otra y por último sigue su recorrido alejandose de las dos flores.
En la gráfica hay un tramo que tiene una línea recta paralela al eje de las x que nos indica que ha estado a la misma distancia de la margarita mientras que la de la rosa ha variado.

Figura 3. Identificación de la relación entre las magnitudes distancia a la rosa y distancia a la margarita

Otros participantes (13 de 109) añaden elementos gráficos o descriptivos concretos, pero sin llegar a explicar de forma satisfactoria la trayectoria completa. Así, en la figura 4 vemos cómo el participante identifica la mediatriz (por el segmento de la gráfica correspondiente a la bisectriz del primer cuadrante), pero luego no interpreta correctamente el resto.

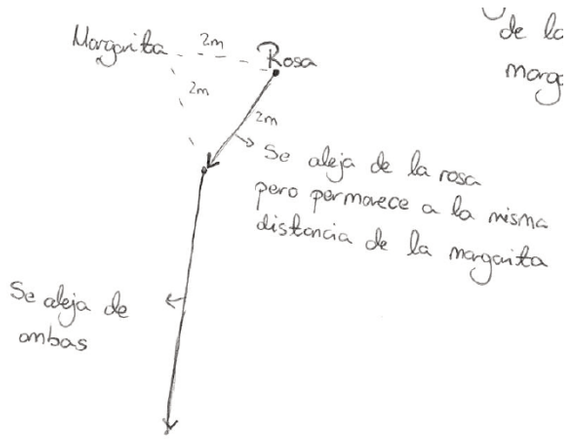


Figura 4. Identificación del segmento correspondiente a la mediatriz

En cuanto a las resoluciones que llegaron a interpretar correctamente casi todos los elementos, nos encontramos con lo que, cariñosamente, mientras corregíamos, denominábamos «la bota» (11 de 109). Son trayectorias como la que mostramos en la figura 5, donde se interpreta todo menos el segmento correspondiente a la recta $y=x-2$ en la gráfica. La trayectoria debería seguir la recta dada por los puntos M y R, pero, quizá, el hecho de que la recta $y=x-2$ y la recta $y=x$ son paralelas en la gráfica lleva a pensar que la trayectoria también ha de serlo.

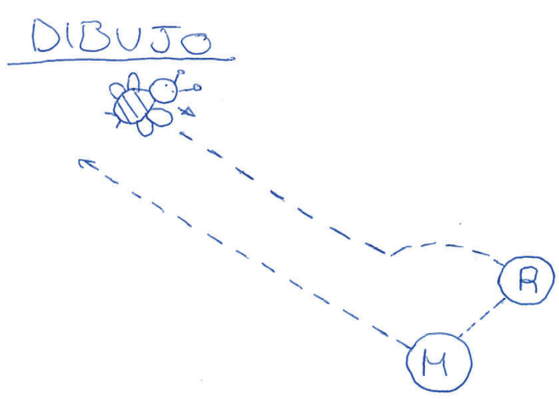


Figura 5. Resolución correcta, salvo en la interpretación del segmento de la recta $y=x-2$ en la gráfica

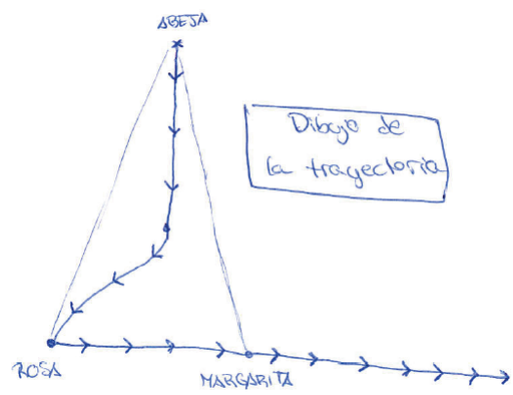


Figura 6. Dibujo de la trayectoria de una de las resoluciones correctas

Finalmente, tres participantes interpretaron correctamente todos los elementos (figura 6). El problema, en realidad, es muy abierto. Alguno de los participantes trató de razonar una trayectoria en tres dimensiones, con la abeja acercándose «desde arriba» y saliendo luego paralela al suelo. En efecto, si no nos restringimos a una representación plana del problema, las trayectorias posibles son infinitas. Por ejemplo, el segmento de la bisectriz del primer cuadrante señala que sus puntos están a la misma distancia de la rosa que de la margarita. En el espacio tridimensional, esto significa que la abeja está volando en el plano perpendicular al segmento que une la margarita y la rosa que pasa por su punto medio, por lo que, todas las rectas (y curvas) contenidas en ese plano cumplen esa condición y podían ser una parte de la trayectoria.

Ahora bien, tampoco sabemos cómo se recorre la gráfica, pues desconocemos la parametrización según el tiempo. Aunque también hay infinitas soluciones, si consideramos que la abeja no vuela «hacia atrás» en ningún momento, podemos pensar que hay dos posibles soluciones dependiendo de cómo recorramos la gráfica. En la primera, la abeja se acerca a las flores de manera que vuela manteniendo la misma distancia a la rosa que a la margarita (va por la mediatriz del segmento definido por las flores). Cuando se encuentra a una distancia igual a la distancia entre la rosa y la margarita, entonces vuela aproximándose a la rosa, pero manteniendo esa distancia con la margarita (va por el arco de la circunferencia con radio igual a la distancia entre la rosa y la margarita). Una vez liba el néctar de la rosa, se dirige en línea recta en dirección a la margarita (se aleja de la rosa y se acerca a la margarita). Después de pasar por la margarita o libar su néctar sigue en la misma dirección con la que se había aproximado a la margarita (figura 7). La otra solución consiste en el recorrido inverso; es decir, acercarse primero a la margarita.

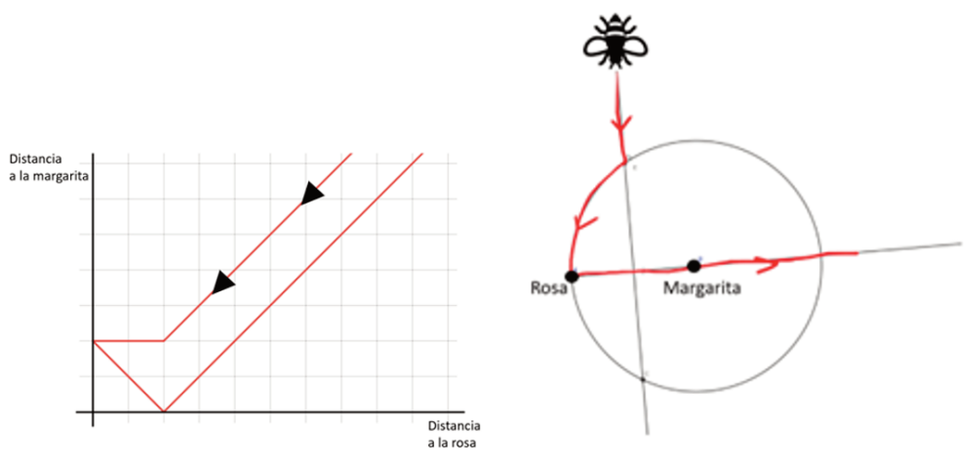


Figura 7. Una posible solución

Nos dejamos en el tintero cómo abordar, en profundidad, este tipo de problemas en el aula. Ahora bien, queremos terminar este artículo con alguna pincelada. De esta manera, por un lado, un posible recorrido didáctico podría consistir en comenzar por el problema inverso. Es decir, proporcionar o describir una trayectoria y que el alumnado deba elaborar la gráfica. Tareas de este estilo se encuentran en el mencionado material del Shell Centre, disponible gratuitamente en la página web del Ministerio de Educación (Swan, 1990). Por otro lado, una vez lanzada la cuestión de, dada la gráfica, describir la trayectoria, quizá sea buena idea prever el andamiaje de proporcionar segmentos aislados más sencillos de interpretar. Por ejemplo, la bisectriz del primer cuadrante o un segmento paralelo a uno de los ejes. Finalmente, sería interesante acompañar estas tareas con otras posteriores donde, empleando algún software, como GeoGebra, el alumnado pudiera indagar de manera dinámica acerca de los lugares geométricos que ocuparía la abeja respecto a la margarita y la rosa a través del arrastre de un punto de la gráfica en el cuadrante y viceversa.

Referencias bibliográficas

GOÑI, M. (2022), «XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO», *Entorno Abierto*, 47, 1–5.

JANVIER, C. (1998), «The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function», *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79-103, <https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)80062-5>.

LEINHARDT, G., O. ZASLAVSKY y M. K. STEIN (1990), «Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching», *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64, <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>.

SWAN, M. (1990), *El lenguaje de las funciones y gráficas,* Shell Centre for Mathematical Education, <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/d/1065/19/0>.

Herramientas geométricas para un rey

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

A menudo se dice que para hacer matemáticas solo se necesita lápiz y papel. Esta frase no es completamente cierta. Surge de una visión de las matemáticas como una disciplina puramente abstracta que no requiere de un contacto directo con la realidad, y de los matemáticos como personas a las que no les interesa la aplicación de sus teorías. Esta concepción, que resulta muy atractiva en ocasiones, también puede conllevar la creación de ciertos estereotipos que se debería tratar de evitar.

Es cierto que al hacer matemáticas hemos de realizar razonamientos sobre modelos abstractos al margen de los objetos reales que han dado lugar a dichos modelos. Pero también es cierto que la creación de dichos modelos y la aplicación de los resultados obtenidos requieren habitualmente de un contacto directo con la realidad. Al modelizar la realidad y aplicar resultados surge la necesidad de utilizar algún tipo de herramientas. Más aún, las herramientas disponibles pueden imponer a veces restricciones sobre la actividad matemática o favorecer métodos y técnicas concretos. Por ejemplo, no es casual que el hoy llamado método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales apareciera en China siglos antes del nacimiento del matemático de Brunswick. Los instrumentos utilizados para calcular por los matemáticos chinos (unas barras de entre 3 y 14 centímetros) y el modo en que se utilizaban, facilitaban el manejo de «información matricial».

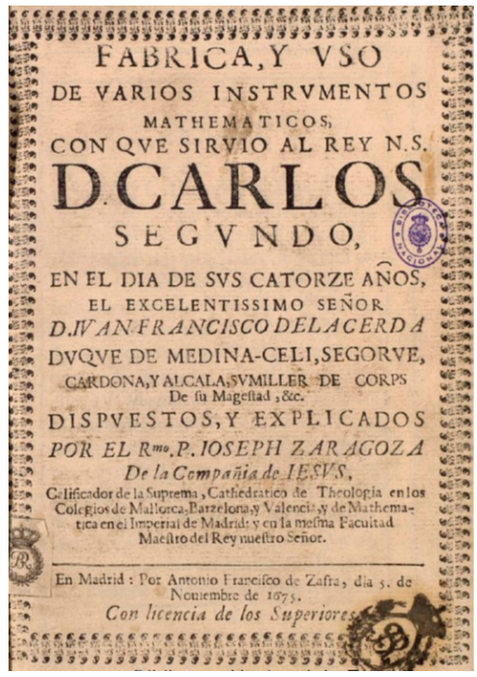
Evidentemente las «herramientas matemáticas» disponibles han variado a lo largo de la historia y también diferían entre distintas culturas. Para realizar operaciones aritméticas se han utilizado piedrecillas, ábacos, reglas deslizantes, tablas, máquinas mecánicas, calculadoras electrónicas, ordenadores, etc. En el caso de la geometría la evolución también ha sido muy grande, desde el uso de varas y cuerdas hasta el software de diseño gráfico o los medidores láser.

Benito Bails, en sus *Principios de Matemática para la Real Academia de San Fernando* publicados en 1758 señalaba la gran importancia de las herramientas en el ejercicio de la geometría práctica y la necesidad de hacerse con unas de calidad:

> Estuches de matemáticas cabales se hallan aquí pocos; los instrumentos de los más, la pantómetra sobre todo, son toscos e imperfectos. Los mercaderes que los traes de fuera del Reino hacen con este género lo que con todos, piden lo que venden, no lo mejor, ni acaso lo bueno. El matemático, el aficionado que quiera un estuche de matemáticas que le sirva, no debe regatear su precio; y es alhaja que bien merece encargarse con tanto cuidado como un puño de espadín o una cadena de reloj.

La importancia de estos instrumentos queda también de manifiesto por el hecho de que, por su decimocuarto cumpleaños, el rey Carlos II recibió como regalo del duque de Medinaceli un conjunto de instrumentos matemáticos. Hay que tener en cuenta que en ese momento los 14 años constituían la mayoría de edad y, en este caso, la subida al trono de Carlos II tras la regencia de su madre Mariana de Austria. Es decir, este conjunto de instrumentos matemáticos fue el regalo que se le hizo al rey al acceder al trono.

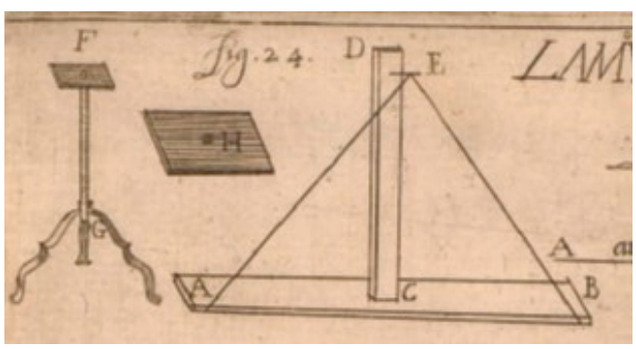
El regalo iba acompañado de un libro de más de 200 páginas en que se describen los instrumentos y su uso. El libro fue escrito por el jesuita Joseph Zaragoza, uno de los más importantes matemáticos españoles de esa época, que completó el encargo de fabricar los instrumentos y escribir la obra en menos de un mes. Para conseguir esta proeza leemos en el prólogo que la obra se iba imprimiendo conforme se escribía, que Zaragoza necesitó ayuda de otros dos colegas jesuitas y que en ese periodo el autor dedicaba las noches a escribir, las mañanas a calibrar los instrumentos y dibujar las láminas, y las tardes a su trabajo habitual.


FABRICA, Y VSO
DE VARIOS INSTRVMENTOS
MATHEMATICOS,
CON QVE SIRVIO AL REY N.S.
D. CARLOS
SEGVNDO,
EN EL DIA DE SVS CATORZE AÑOS,
EL EXCELENTISSIMO SEÑOR
D. IVAN FRANCISCO DE LA CERDA
DVQVE DE MEDINA-CELI, SEGORVE,
CARDONA, Y ALCALA, SVMILLER DE CORPS
De su Magestad, &c.
DISPVESTOS, Y EXPLICADOS
POR EL Rmo. P. IOSEPH ZARAGOZA
De la Compañia de IESVS,
Calificador de la Suprema, Catheddratico de Theologia en los Colegios de Mallorca, Barzelona, y Valencia, y de Mathematica en el Imperial de Madrid: y en la mesma Facultad Maestro del Rey nuestro Señor.
En Madrid: Por Antonio Francisco de Zafra, dia 5. de Noviembre de 1675.
Con licencia de los Superiores.

En total el regalo constaba de los siguientes elementos:

— Una regla de latón de una vara de largo, con diversas subdivisiones.
— Una pantómetra militar, también con diversas subdivisiones lineales y angulares.
— Un triángulo filar, de dos pies.
— Una cruz geométrica.
— Un rombo gráfico.
— Un triángulo equilátero de tres pies y medio de lado y cuatro dedos de ancho, graduado de minuto en minuto.
— Un triángulo equilátero de dos pies y medio de lado y un dedo de ancho, graduado de 10 minutos en 10 minutos.
— Un catalejo.
— Un compás harmónico.
— Un compás de varilla para usar con la pantómetra y tomar medidas.
— Una cadenilla de 10 pasos geométricos (50 pies).
— Una mesa de palosanto para usar el triángulo filar y un soporte para el catalejo.
— El pie de la mesa y de todos los instrumentos.
— Una escuadra de una vara.
— Una caja para todo lo anterior y otra más pequeña con instrumentos adicionales grabados con su nombre.
— El libro en que se explican los instrumentos y su uso.

El contenido del libro consiste en una descripción de cómo se fabrican los instrumentos geométricos correspondientes, junto con una serie de explicaciones y ejercicios prácticos sobre cómo realizar con ellos diversas medidas y construcciones relacionadas con la topografía, fortificación, etc.



El triángulo filar se describe de la siguiente manera (adaptamos el discurso e incluimos la figura original de la obra de Zaragoza):

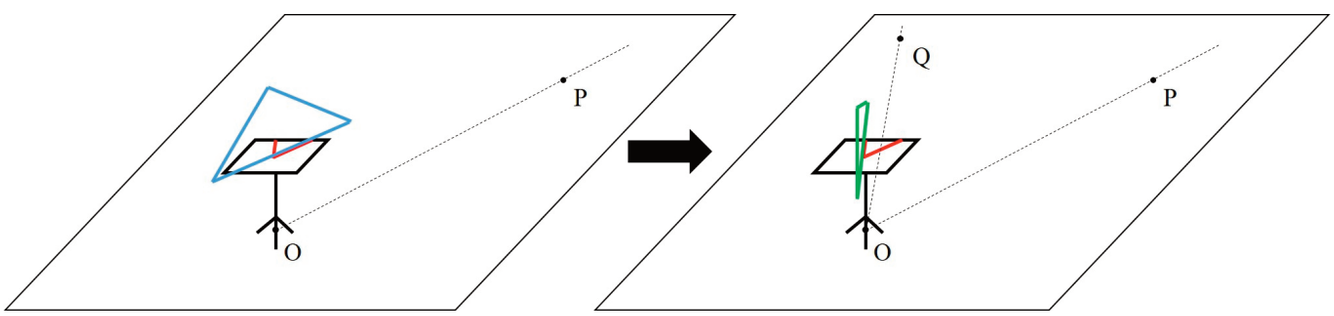
> El triángulo filar, que se forma con un hilo, tiene admirables usos en la práctica de la campaña porque además de ser muy seguro y fácil de usar, tiene igual facilidad su construcción y se puede hacer en el campo. En la Fig. 24 es AB una regla que por lo menos tenga media cuarta de ancho, y de largo media vara. CD es otra regla de un dedo y perpendicular sobre AB. En D se pone un clavo ED que salga 3 dedos y después se coloca un hilo asegurando que el plano del triángulo sea perpendicular al plano de la regla AB. El pie del instrumento es FG. En el punto F hay una tablilla cuadrada fija horizontal de la que sobresale una espiga. Esta espiga se puede encajar en un agujero no pasante que está en el centro de otra tabla cuadrada H mayor que la anterior. De este modo la tabla H se puede colocar horizontal encima de la tabla F y girar completamente en torno a su centro.

Así pues, esencialmente tenemos una mesa horizontal que puede rotar manteniéndose paralela al suelo y sobre la cual podemos colocar el triángulo *ABE* formado por un hilo. Con este aparato, Zaragoza propone las siguientes prácticas de campaña sobre el terreno:

— Trazar una perpendicular a una recta por un punto de la misma.
— Trazar una paralela a una recta por un punto cualquiera.
— Trazar una perpendicular a una recta por un punto exterior.
— Medir un ángulo.
— Trazar un ángulo igual a uno dado.
— Trazar una recta que forme un ángulo dado con otra recta dada.
— Construir un polígono regular dado su centro.
— Construir un polígono regular dado su lado.
— Trazar planos en distintas situaciones.

El modo de trabajar se fundamenta, básicamente, en proyectar una construcción realizada en un papel situado sobre la tabla *H* utilizando el plano del triángulo de hilo para determinar las líneas de visión. Por ejemplo, para construir un hexágono regular alrededor de un punto del terreno Zaragoza propone lo siguiente.

Supongamos que, sobre el terreno, queremos construir un hexágono regular centrado en *O* y cuyo primer vértice sea, por ejemplo, *P*. Colocamos la mesa de trabajo sobre el punto *O*. Como el ángulo central de un hexágono regular es de 60º, dibujamos en un papel un ángulo de 60º y lo fijamos en la mesa de manera que el vértice del ángulo sea el centro (en rojo en la figura). Colocamos el triángulo de hilo (en azul en la figura) de forma que la base esté sobre uno de los lados del ángulo. Giramos la tabla de la mesa (recordar que gira libremente) hasta que ese lado del ángulo sea paralelo a *OP*. Para ello basta ir girando hasta que visualmente los dos hilos se superpongan uno sobre otro y sobre el punto *P*. En ese momento, sin girar la mesa, tomamos el triángulo (recordar que es una pieza suelta) y lo recolocamos de forma que ahora su base esté sobre el otro lado del ángulo (en verde en la figura). Entonces, colocamos un punto *Q* de forma que los dos hilos se superpongan visualmente entre sí y con *Q*. La línea *OQ* da la dirección en la que se encuentra el siguiente vértice del hexágono y basta con trasladar la distancia *OP* sobre *OQ*. Los demás vértices se obtienen repitiendo este procedimiento.

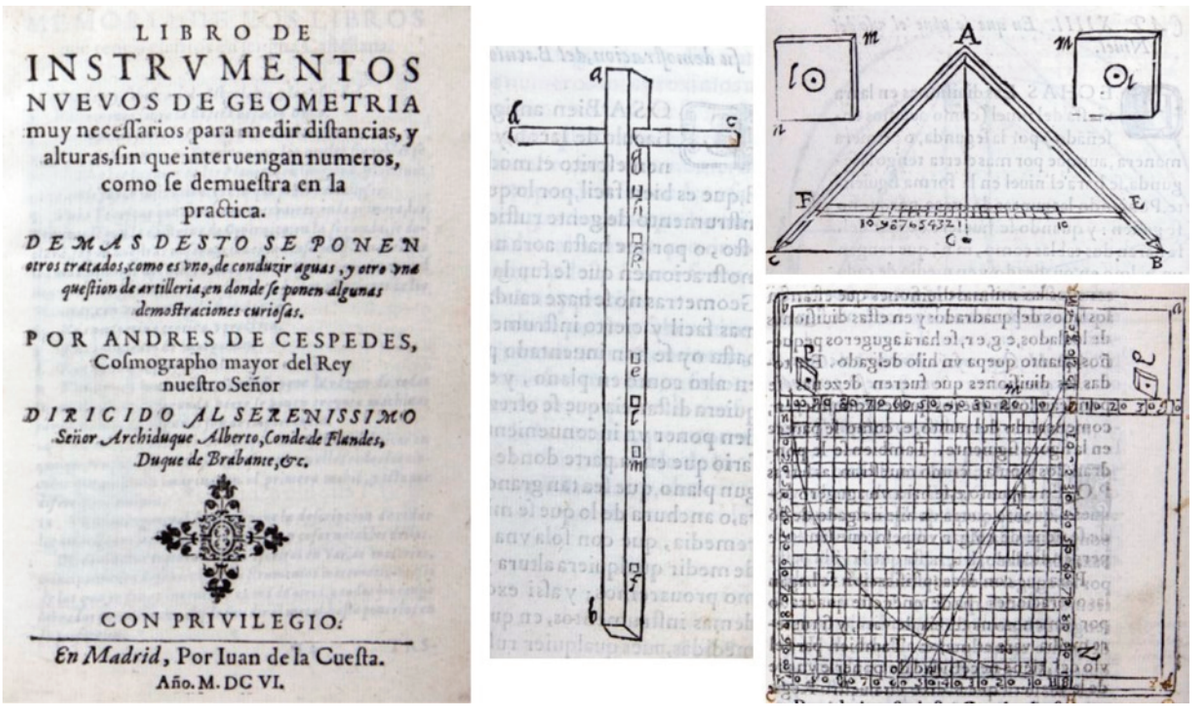


El resto de construcciones realizadas con el triángulo filar transcurren de una forma más o menos análoga. Cada uno de los restantes instrumentos tiene sus particularidades, sus usos y sus técnicas correspondientes.

A la vista de esta situación surge una interesante dicotomía entre la resolución teórica de un problema y su resolución en la práctica. En los *Elementos* de Euclides (Libro IV, Proposición 15) ya aparece la construcción de un hexágono inscrito en un círculo. Pero esa construcción, plenamente satisfactoria desde el punto de vista teórico, no puede llevarse a cabo en la práctica cuando se trabaja a «escalas reales» sobre el terreno. Entonces surge la necesidad de trasladar esa construcción al contexto real.

En ocasiones la construcción no es directamente trasladable y debe modificarse. En el ejemplo que nos ocupa la idea se basa en que el ángulo central del hexágono regular es conocido y simplemente se traslada sobre el terreno. Pero, como comentábamos al principio, el uso de este procedimiento viene marcado esencialmente por la herramienta que se utiliza. El método funciona porque la mesa puede rotar, porque el hilo es fino, porque el triángulo se puede reubicar, etc. Otras herramientas dan lugar a otros procedimientos de construcción diferentes y hacen uso quizás de otras propiedades de los hexágonos regulares.

Por ejemplo, en la figura siguiente vemos otros instrumentos extraídos de un libro de 1606 titulado *Libro de instrumentos nuevos de geometría* y escrito por Andrés de Céspedes. Se trata de un báculo de Jacob, de un cuadrante y de un nivel. Nuevamente, cada uno de ellos tiene sus usos y procedimientos que el autor de la obra se encarga de desentrañar.


LIBRO DE
INSTRVMENTOS
NVEVOS DE GEOMETRIA
muy necessarios para medir distancias, y alturas, sin que interuengan numeros, como se demuestra en la practica.
DEMAS DESTO SE PONEN otros tratados, como es vno, de conduzir aguas, y otro vna question de artilleria, en donde se ponen algunas demostraciones curiosas.
POR ANDRES DE CESPEDES, Cosmographo mayor del Rey nuestro Señor
DIRICIDO AL SERENISSIMO Señor Archiduque Alberto, Conde de Flandes, Duque de Brabante, &c.
CON PRIVILEGIO.
En Madrid, Por Iuan de la Cuesta.
Año. M. DC VI.

Puede parecer que todo esto no tiene interés desde un punto de vista matemático, pero no es así. Es posible que un método correcto teóricamente sea inaplicable en la práctica. También es posible que nos encontremos con una herramienta con la que no estamos familiarizados, y necesitemos utilizarla para realizar una construcción. Saber adaptar los conocimientos que tengamos (ya sean teóricos o prácticos en el uso de un instrumento) al uso de otro diferente, conlleva un trabajo matemático intenso.

Estos ejemplos provienen de un contexto geométrico ya abandonado pero la problemática no es exclusiva de la geometría. Pensemos, por ejemplo, en los criterios para determinar si un número es primo o no. El teorema de Wilson da una caracterización completa de los números primos. Un entero n es primo si y solo si $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. Sin embargo, este resultado es inútil en la práctica.

En la actualidad, el uso de herramientas informáticas, conlleva este tipo de situaciones y se puede pensar, por ejemplo, que diseñar y programar algoritmos presenta dificultades muy similares.

Cole. ggb #20

Reconocimiento de formas

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Entendemos por formas geométricas los conjuntos de puntos que constituyen líneas, de una dimensión, superficies, de dos dimensiones, y cuerpos, con tres dimensiones.

Por su configuración matemática, tendemos a trabajarlos en clase comenzando por los más sencillos (puntos y líneas) para avanzar hacia los más complejos (superficies y, finalmente, cuerpos). Sin embargo, no debemos olvidar que los niños viven inmersos en el mundo real que es tridimensional, en el cual interactúan constantemente con figuras que, mayoritariamente, son cuerpos.

Esta no es una idea nueva. Juan Palau (1934) ya nos indicaba que «El estudio de las formas […] no puede empezar por puntos y líneas, que son puras abstracciones, sino por cuerpos y, mejor todavía, por objetos todos ellos más o menos familiares al niño. Las caras, las líneas, los puntos, los irá conociendo el alumno al hacer el análisis de los sólidos geométricos en que se hallan comprendidos».

Realmente, la interacción cotidiana no solo se produce con cuerpos, sino también con sus superficies, con lo que es interesante plantear al mismo tiempo el estudio de ambos elementos, de dos y tres dimensiones. Así mismo, manteniendo el enfoque del trabajo sobre elementos cotidianos, se puede abordar el manejo de las líneas, siempre asociadas a un objeto tridimensional, como abstracción de una parte del mismo.

El enfoque del trabajo sobre objetos familiares al niño, pertenecientes a su entorno cotidiano, que plantea Palau es fundamental en todos los procesos de aprendizaje. Pero cobra especial importancia si estamos hablando del estudio de las formas. La observación y manipulación de los objetos es el punto de partida para avanzar en el reconocimiento de las propiedades de los mismos, que, posteriormente, nos llevará a la abstracción de lo que entendemos por forma geométrica como compendio de dichas propiedades. Este podría ser el resumen de la forma de iniciar a los alumnos en el estudio de las formas geométricas: partiendo de la observación de las formas de los objetos cotidianos pasarán, guiados por el docente, al descubrimiento de las propiedades geométricas de dichos objetos para abstraer finalmente el concepto general de la figura geométrica. Este proceso se puede llevar a cabo a la vez, tanto con formas tridimensionales como con formas planas o lineales. Nos estaríamos moviendo, pues, en los niveles 0 y 1 de Van Hiele.

A continuación proponemos un conjunto de actividades realizadas con GeoGebra para trabajar el reconocimiento de formas. El criterio de ordenación es doble. Tal como hemos sugerido más arriba, hemos colocado en primer lugar aquellas actividades que trabajan con objetos tridimensionales, después las que manejan superficies y, por último, una actividad para trabajar las líneas. Por otra parte, consideramos que los niños, en primer lugar, deben reconocer la forma en objetos cotidianos, pasando a continuación a distinguir una forma dada entre otras por sus propiedades y dejando para el final la reproducción de las formas.

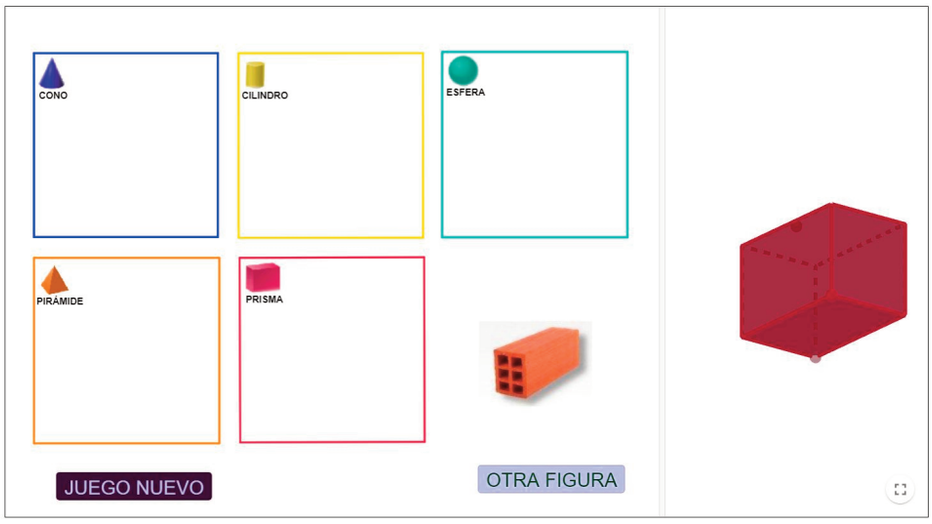
Lógicamente, el uso de los materiales aquí expuestos no excluye en absoluto al material manipulativo. Este está siempre en la base de un aprendizaje adecuado de cualquier contenido matemático, y en concreto, geométrico.

Actividades

Reconoce la figura

La primera actividad que proponemos persigue el reconocimiento de formas geométricas abstractas en objetos reales, más o menos pertenecientes al entorno cercano del alumno. Se trata de figuras tridimensionales: la esfera, el cono, el cilindro, la pirámide y el prisma. En concreto hay que clasificar por su forma los objetos que van apareciendo.

Cada vez que hacemos clic en el botón OTRA FIGURA, aparece la imagen de un objeto real. El alumno debe asociar el objeto a una de las cinco figuras tridimensionales, cuya representación aparece en la escena, y arrastrarla a la caja de dicha figura. Cuando las imágenes se agotan, mediante el botón JUEGO NUEVO, se reinicia y comienzan a salir de nuevo.



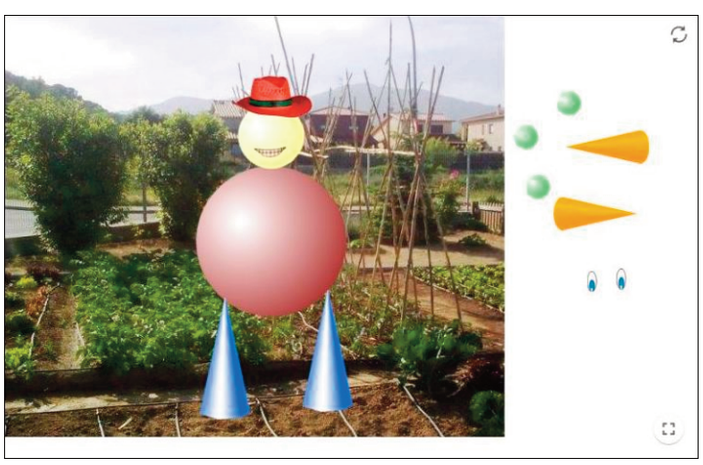
Además, si se hace clic sobre una de las figuras abstractas, esta aparece a la derecha de la escena ampliada en 3D. Se puede modificar su tamaño arrastrando el punto que encontraremos fácilmente, y se puede girar mediante el botón derecho de ratón. La posibilidad de hacer estas manipulaciones sobre la pantalla puede resultar muy motivador y aportar a la imagen mental que los niños tienen de la figura. El docente puede plantear un debate en el aula sobre las propiedades de la figura. ¿Todas sus caras son planas? ¿Cuántas caras tiene? ¿Podría rodar? ¿En cualquier dirección?… Si además se refuerza con la manipulación de un objeto real de esa forma, el aprendizaje será todavía más significativo.

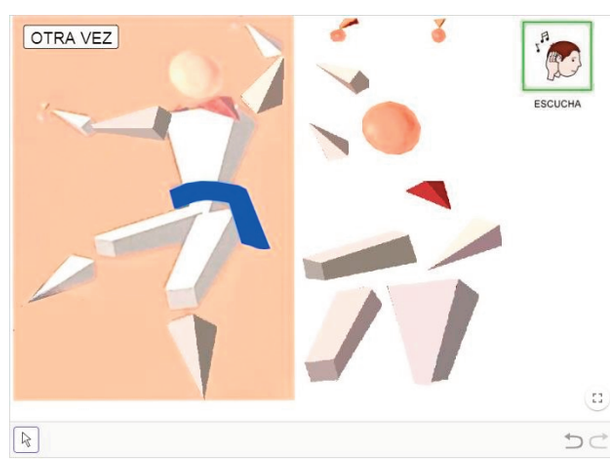
Espantapájaros y El Bailador

Estas dos actividades también trabajan con cuerpos geométricos. Ambas plantean sendos puzles en los que las piezas son figuras de este tipo.

Son actividades sencillas con las que, además de jugar con el puzle, se pueden plantear preguntas sobre las propiedades de las distintas formas que aparecen.

En el caso del *Espantapájaros 3D*, a diferencia de con *El Bailador*, se pueden incluso comentar los nombres de las distintas figuras, ya que solo aparecen esferas y conos.

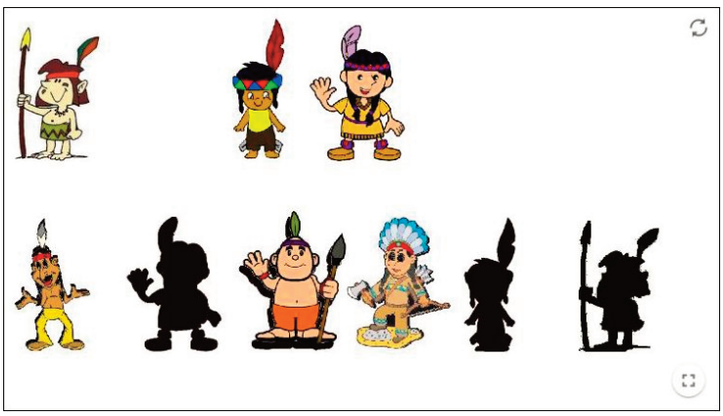


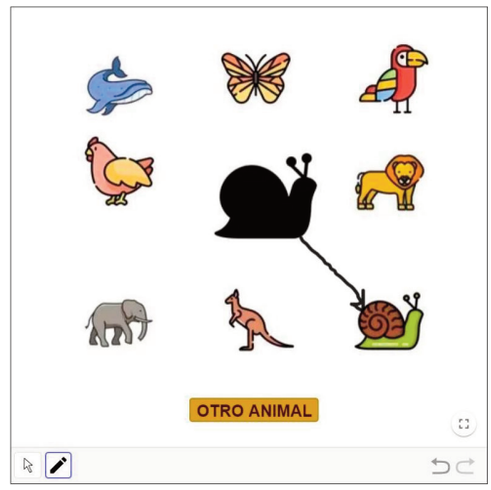


Coloca las siluetas y Siluetas de animales

Se trata de dos actividades de corte similar en las que el alumnado debe reconocer la silueta que corresponde a una figura, e identificarla con ella. En ambas actividades se trabaja con objetos cotidianos y sobre figuras planas no geométricas. Esto nos permite movernos en un plano menos abstracto e ir identificando las propiedades que diferencian unas siluetas de otras, hasta dar con la correspondiente a nuestra imagen. Es decir, acabarán distinguiendo unas formas de otras por las diferencias entre sus propiedades.

En el caso de las siluetas de los indios, se muestran a la vez todas las formas y todas las siluetas, de modo que los niños pueden comparar las figuras y las siluetas entre sí, además de comparar las primeras con las segundas. La correspondencia se realiza arrastrando la figura hasta colocarla sobre la silueta que se considera acertada. Esta forma de trabajar permite encontrar pronto las diferencias, de manera que el alumno sabrá rápidamente si ha acertado o no, según queden zonas de la imagen expuestas o no.





En el caso de la actividad sobre siluetas de animales, se ofrece la de un animal, rodeado por 8 imágenes de animales en un dibujo reconocible. El objetivo de la actividad será reconocer el animal al que pertenece la silueta. Se puede rodear con el lápiz, señalarlo con una flecha o verbalizar su posición respecto a la silueta: encima de, a la derecha, a la izquierda, al lado, debajo de…, con lo que de esta forma se amplían las posibilidades de la actividad, que puede emplearse para trabajar la orientación en el plano.

Formas diferentes

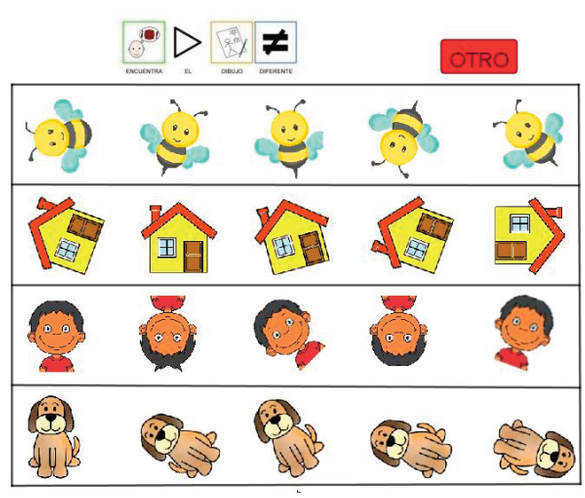
Esta actividad presenta una tabla con cuatro filas.

En cada fila aparecen cinco imágenes de un mismo dibujo, todas ellas muy similares y solamente una es diferente al resto. Estas imágenes aparecen en diferentes posiciones para añadir dificultad a la actividad.

El alumnado deberá encontrar en cada fila la imagen que es diferente a las demás, señalándola con el lápiz de la aplicación.

Cada vez que reiniciamos la actividad con el botón OTRO, las figuras cambian de posición aleatoriamente.

Este ejercicio requiere de una gran atención por parte de los niños y niñas y resuelto en gran grupo favorece la capacidad de expresar verbalmente el proceso seguido para la elección de una figura u otra.

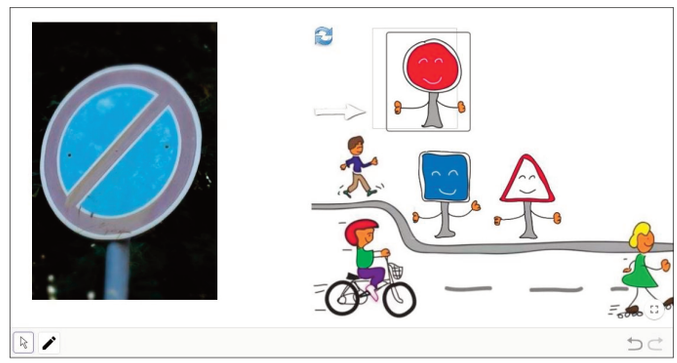


Actividades sobre señales de tráfico

Las señales de tráfico son presentes en la realidad de los niños desde edades muy tempranas. Además, su observación se da en el ámbito de lo familiar ya que se conocen en familia y pueden incluso formar parte de juegos verbales. Por ello, podemos aprovechar este conocimiento previo para profundizar en la abstracción de las figuras geométricas planas.

En esta ocasión proponemos cuatro actividades con dificultad creciente.

¿Qué forma tiene la señal?

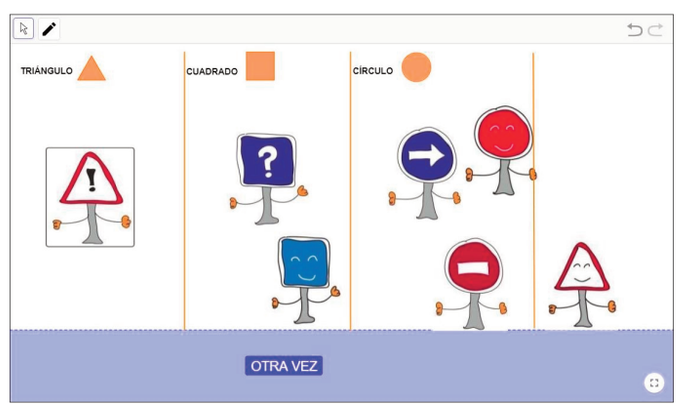


En este caso, la actividad propone una imagen real de una señal y el alumnado debe seleccionar la representación de la figura geométrica correspondiente y moverla a una posición preferente. Dichas representaciones están entre una representación formal y una imagen real de la señal, ya que se trata de dibujos que simulan las señales, pero cuyo rasgo principal por el que se reconocen es la forma geométrica. Además, poseen atributos humanos, como manos, ojos o sonrisa, lo que las hace más cercanas, constituyendo un paso intermedio entre lo real y lo abstracto. La herramienta LÁPIZ permite intentar el dibujo abstracto de las figuras geométricas.

Deja las señales

Jugando con la misma representación amable de las señales de tráfico, esta actividad nos propone la localización de las señales que no cumplen con un modelo. Exige pues que el alumnado compare las propiedades de este con los dibujos de las señales para ir descartando aquellas que tienen las propiedades diferentes. Para retirarlas, basta con hacer un clic sobre ellas y desaparecen. El docente puede promover la realización conjunta de la actividad si se trabaja con la pizarra interactiva de manera que todos contribuyan a indicar al alumno que está en la pizarra, aquellas señales que debe descartar, siempre de una forma razonada.

Lleva la señal con su forma

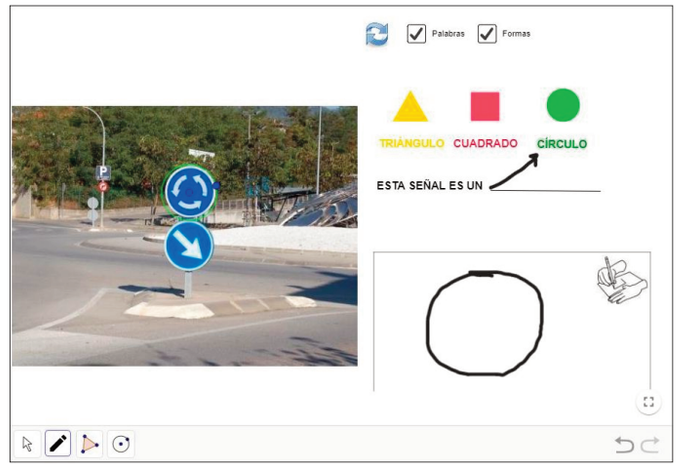


Esta actividad propone una sencilla clasificación de las señales de tráfico por la forma geométrica que presentan. Está dentro, pues, del grupo de actividades que buscan el reconocimiento de las formas, en este caso planas, en objetos cotidianos. Los niños deben ir arrastrando las señales a la caja que contiene la forma geométrica correspondiente. El docente puede aprovechar la realización de la actividad para verbalizar, tanto el nombre de las figuras como algunas de las propiedades que las definen (número de lados…).

El botón OTRA VEZ permite reiniciar la actividad, saliendo las señales en distinto orden. Finalmente, se puede hacer un recuento de las señales de cada figura y anotar el resultado mediante la herramienta lápiz. O usar esta para ir más allá y representar las figuras abstractas, en el caso de que el docente lo considere adecuado.

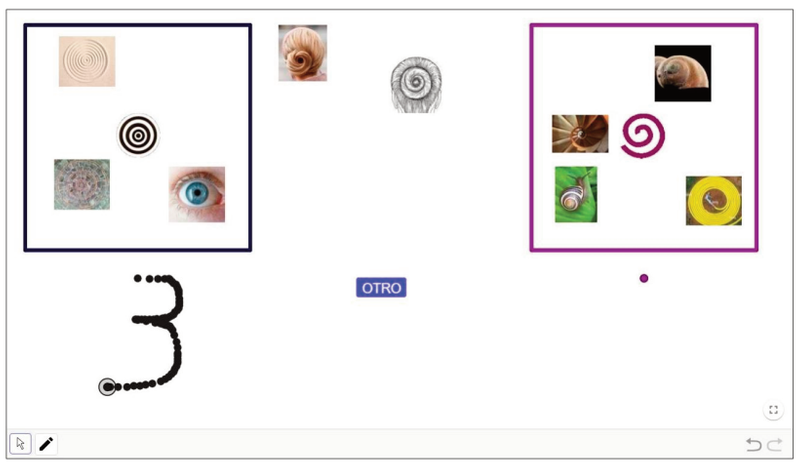
Señales y geometría

La última actividad que proponemos con señales de tráfico va un poco más allá. Trabaja el reconocimiento de las figuras geométricas en objetos cotidianos por sus propiedades, pero además permite ocultar los modelos de las figuras para que los niños asignen directamente el nombre geométrico a la vista de la señal de tráfico. Se pueden ocultar tanto los modelos de las figuras como los nombres de las mismas. Se mostrarán o no en función del nivel de partida del alumnado con el que se trabaje.



Espirales y círculos

Aunque las espirales y los círculos concéntricos no son figuras sencillas, hemos incorporado una actividad que trabaja las diferencias entre estas dos líneas que, aparentemente son parecidas, pero cuyas diferencias vienen dadas por propiedades geométricas (como el hecho de ser abiertas o cerradas, o la equidistancia de sus puntos) Asociadas a objetos cotidianos, esta aplicación inicia al alumnado en la distinción de estos dos tipos de curvas. Se trata de una sencilla clasificación en dos cajas separadas. Bajo ellas, mediante un punto con rastro, podemos escribir el número que hay de cada una, después de hacer un recuento.



Dibujar formas

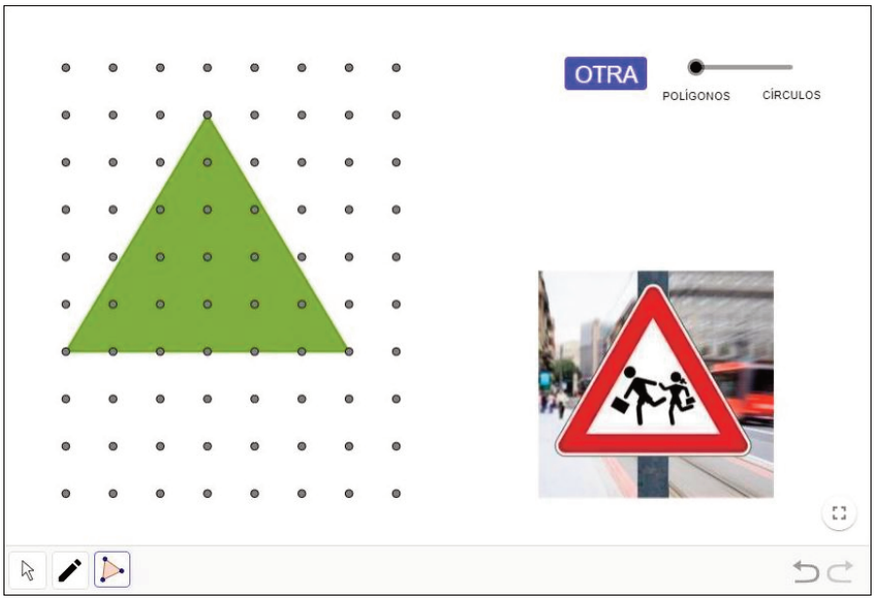
Una vez que se ha insistido en el reconocimiento de las formas y la distinción entre unas y otras por el análisis de sus propiedades, se puede abordar el trazado de las formas, tarea que resulta bastante más complicada al alumnado. Ello es debido a dos aspectos. Por un lado, abstraer una figura geométrica (círculo, por ejemplo) a partir de la imagen de un objeto cotidiano (un plato, en el ejemplo) implica un proceso mental complejo. Por otra parte, una actividad de trazado exige un buen control de la motricidad y no todos los niños son igual de maduros en este sentido.

Proponemos una actividad que permite trabajar tanto polígonos como círculos. Para elegir cuál de las dos opciones queremos usaremos el deslizador de arriba a la derecha. En cualquier caso, siempre aparece un objeto cotidiano, cuya forma geométrica hay que trazar.

En el caso de los polígonos, cuando se selecciona esta opción, aparece en la escena una trama cuadrada de puntos (geoplano) sobre la que se puede dibujar un polígono, bien con la guía de la herramienta polígono, bien a mano alzada con la herramienta lápiz.

En el caso de los círculos, se propone el trazado guiado de su circunferencia arrastrando los puntos que aparecen en la escena. Se considera difícil el trazado a mano alzada, pero si el docente lo cree oportuno, puede emplear la herramienta lápiz para realizarlo.

Con el botón OTRA aparece una nueva figura y desaparece el trazado anterior.



Esta pequeña colección de materiales son solo una muestra de lo que se puede llevar al aula para abordar la introducción de las formas geométricas, tanto planas como tridimensionales, en el aula de Educación Infantil. La pizarra digital interactiva siempre es una herramienta versátil y si, como hemos indicado más arriba, va acompañada de la manipulación de material real y cercano al alumnado, muchísimo mejor.

Referencias bibliográficas

Palau, J. (1934), *Geometría (Estudio de las formas)*, Ed. Seix Barral, recuperado de Carrillo, J. y otros (2018), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil*, Ed. Paraninfo.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Enero de 2023
ISSN: 2386-8821e

BY NC SA